Úlohy klauzurní části I. kola kategorie B

1. Pro reálná čísla x, y, z platí

$$\begin{aligned} |x+y| &= 1-z, \\ |y+z| &= 1-x, \\ |z+x| &= 1-y. \end{aligned}$$

Zjistěte, jakých hodnot může nabývat součet $x+y+z$. Pro každý vyhovující součet uveďte příklad odpovídajících čísel x, y, z.

2. Uvažujme trojúhelník ABC, ve kterém je $|\sphericalangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky AC označme D, obraz C podle AB označme E a obraz B podle AD označme F. Dokažte, že $|CF| = |DE|$.

3. Dokažte, že pokud pro nějaká kladná celá čísla a, b, c je $3^a \cdot 7^b - 10^c$ kladné dvojmístné číslo, pak je to prvočíslo.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

v úterý 26. ledna 2021 od 8.30 do 12.30

Soutěžící mají na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.
Řeší-li žák klauzurní část distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 12.50.

1. *Pro reálná čísla x, y, z platí*

$$\begin{aligned} |x+y| &= 1-z,\\ |y+z| &= 1-x,\\ |z+x| &= 1-y. \end{aligned} \tag{1}$$

Zjistěte, jakých hodnot může nabývat součet $x+y+z$. Pro každý vyhovující součet uveďte příklad odpovídajících čísel x, y, z. (Mária Dományová & Patrik Bak)

Řešení. Pokud je $x+y \geqq 0$, pak podle první zadané rovnice platí $x+y=1-z$, takže hledaný součet $x+y+z$ je roven 1. Ke stejnému závěru dojdeme, bude-li platit $y+z \geqq 0$ nebo $z+x \geqq 0$. Zbývá posoudit případ, kdy všechny tři součty $x+y$, $y+z$, $z+x$ jsou záporné. Tehdy lze danou soustavu přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} -x-y &= 1-z,\\ -y-z &= 1-x,\\ -z-x &= 1-y. \end{aligned} \tag{2}$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme $x+y+z=-3$. Součet $x+y+z$ tedy vždy nabývá buď hodnoty 1, nebo hodnoty -3. Ukážeme, že obě tyto hodnoty jsou na řešeních soustavy (1) dosažitelné.

Najít potřebné trojice (x,y,z) bude snadné. Jak se totiž ukáže, stačí se přitom omezit na trojice stejných čísel $x=y=z$. Tehdy se soustava (1) redukuje na jedinou rovnici $|2x|=1-x$. Ta má zřejmě dvě řešení $x=-1$ a $x=\frac{1}{3}$. Těm odpovídají řešení $(-1,-1,-1)$ a $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ původní soustavy (1), která již potvrzují, že oba součty $x+y+z=-3$ i $x+y+z=1$ jsou dosažitelné.*

Poznámka. Rovnost $x+y+z=-3$ splňuje *jediné* řešení $(-1,-1,-1)$ soustavy (1), protože to je jediné řešení soustavy (2).** Rovnost $x+y+z=1$ splňuje *nekonečně mnoho* řešení (x,y,z) soustavy (1); všechna jsou určena podmínkou

$$(x \leqq 1) \wedge (y \leqq 1) \wedge (z \leqq 1) \wedge (x+y+z=1).^{***}$$

První tři nerovnosti vyjadřují, že pravé strany rovnic soustavy (1) jsou nezáporné; jsou-li splněny, pak z rovnosti $x+y+z=1$ plyne, že jsou nezáporné i součty $x+y$, $y+z$, $z+x$ (rovné po řadě $1-z$, $1-x$, $1-y$), takže (x,y,z) je řešením soustavy (1).

* Trojice $(-1,-1,-1)$ a $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ jsme mohli rychleji získat přímou volbou $x=y=z$ v rovnicích $x+y+z=-3$, resp. $x+y+z=1$, a pak se dosazením přesvědčit, že to jsou řešení soustavy (1).

** Pokud totiž trojice (x,y,z) splňuje (1), ne však (2), musí být jeden ze součtů $x+y$, $y+z$, $z+x$ kladný, takže pak (jak víme) platí $x+y+z=1$.

*** Množinou všech takových trojic (x,y,z) je v kartézské soustavě souřadnic (rovnostranný) trojúhelník s vrcholy $[1,1,-1]$, $[1,-1,1]$ a $[-1,1,1]$. Z nerovnic $x \leqq 1$, $y \leqq 1$ totiž plyne $z=1-x-y \geqq -1$ a podobně pro x, y. Vyhovující body tak leží v průniku krychle s vrcholy $[\pm1,\pm1,\pm1]$ s rovinou $x+y+z=1$, což je výše zmíněný trojúhelník.

Jiné řešení. Při označení $s = x + y + z$ lze soustavu (1) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} |s - z| &= 1 - z,\\ |s - x| &= 1 - x,\\ |s - y| &= 1 - y. \end{aligned} \tag{3}$$

Považujme dále číslo s v soustavě (3) za (nezávislý) parametr. Naším úkolem je zjistit, pro které hodnoty s existuje řešení (x, y, z) soustavy (3) s vlastností $x + y + z = s$.

Je-li $s = 1$, pak řešeními soustavy (3) jsou (podle definice absolutní hodnoty) právě ty trojice (x, y, z), pro které platí nerovnosti $1 - z \geqq 0$, $1 - x \geqq 0$, $1 - y \geqq 0$. Příkladem takového řešení s vlastností $x + y + z = s = 1$ je kupříkladu trojice $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Zbývá posoudit případ, kdy $s \neq 1$. Tehdy $s - z \neq 1 - z$, takže z první rovnice v (3) plyne $s - z \neq |s - z|$ neboli $s - z < 0$. Proto lze první rovnici v (3) přepsat jako $-(s-z) = 1-z$, odkud $z = \frac{1}{2}(s+1)$. Analogicky musí platit $x = \frac{1}{2}(s+1)$ a $y = \frac{1}{2}(s+1)$. Z podmínky $x + y + z = s$ nyní zapsané jako $\frac{3}{2}(s + 1) = s$ plyne, že je nutně $s = -3$. Snadno se přesvědčíme, že odpovídající trojice $(-1, -1, -1)$ je řešením soustavy (1).

Dospěli jsme ke stejnému závěru jako v prvním řešení: jediné dvě možné hodnoty součtu $x + y + z$ jsou čísla 1 a -3.

Jiné řešení. Ještě jedním algebraickým postupem dokážeme, že $x+y+z \in \{-3, 1\}$. (Otázku dosažitelnosti obou hodnot už opakovaně posuzovat nebudeme.)

Absolutních hodnot v soustavě (1) se zbavíme tak, že každou ze tří rovnic umocníme na druhou. Když je následně sečteme, dostaneme

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = (1 - z)^2 + (1 - x)^2 + (1 - y)^2.$$

Odtud po snadné úpravě obdržíme rovnici

$$(x + y + z)^2 + 2(x + y + z) - 3 = 0,$$

která je kvadratickou rovnicí $s^2 + 2s - 3 = 0$ pro zkoumaný součet $s = x + y + z$. Její kořeny jsou $s = -3$ a $s = 1$. Tím je slíbený důkaz hotov.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho: 4 body za důkaz, že součet $s = x + y + z$ nemůže nabývat jiných hodnot než 1 nebo -3; 1 bod za příklad řešení (x, y, z) se součtem $s = 1$; 1 bod za uvedení (jediného) řešení $(-1, -1, -1)$ se součtem $s = -3$.

Za neúplný důkaz tvrzení $s \in \{-3, 1\}$ lze získat částečné body (například při neúplném rozboru možných znamének součtů $x + y$, $y + z$, $z + x$), nejvýše však 2 body, je-li v postupu logická chyba (například opomenutí nějakého případu možných znamének).

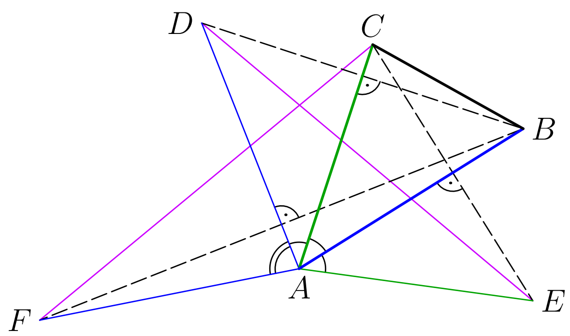
Pokud se řešitel snaží popsat množinu všech řešení dané soustavy, žádné body navíc tím nezískává.

2. *Uvažujme trojúhelník ABC, ve kterém je $|\sphericalangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky AC označme D, obraz C podle AB označme E a obraz B podle AD označme F. Dokažte, že $|CF| = |DE|$.* (Patrik Bak)

Řešení. Úsečky CF a DE z dokazované rovnosti jsou stranami trojúhelníků ADE a AFC. Proto stačí dokázat, že tyto dva trojúhelníky jsou shodné, $\triangle ADE \cong \triangle AFC$.

Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Zdůrazněme předem, že díky zadané podmínce $\alpha < 60°$, která znamená, že $3\alpha < 180°$, budeme moci počítat velikosti (konvexních) úhlů se společným vrcholem A podle poloh jejich ramen jako na obrázku.*

Osové souměrnosti, které určují konstrukci bodů D, E a F, předně znamenají, že platí rovnosti $|AD| = |AB| = |AF|$ a $|AE| = |AC|$, jak jsme dvěma barvami vyznačili na obrázku. Dalším důsledkem je, že velikost α má nejen úhel BAC, ale mají ji také úhly CAD a EAB, takže konvexní úhel BAD má velikost 2α a konvexní úhel EAD má velikost 3α. Posledním potřebným důsledkem souměrností je, že velikost 2α má nejen úhel BAD, ale i úhel DAF, a proto konvexní úhel CAF má velikost 3α, tedy stejnou jako dříve uvedený úhel EAD.



Obr. 1

Z odvozených rovností $|AD| = |AF|$, $|AE| = |AC|$ a $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle CAF|$ podle věty *sus* již plyne shodnost $\triangle ADE \cong \triangle AFC$, kterou jsme chtěli dokázat.

Dodejme, že úvahu o shodných trojúhelnících ADE, AFC lze bez zmínky o nich popsat úvahou o otočení se středem v bodě A o orientovaný úhel EAC. Podle výsledků z třetího odstavce našeho řešení je při takovém otočení obrazem úsečky DE právě úsečka FC.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho: 1 bod za uvedení rovnosti $|AE| = |AC|$; 1 bod za důkaz rovnosti $|AD| = |AF|$; 1 bod za důkaz rovností $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD|$; 1 bod za důkaz $|\sphericalangle DAF| = 2|\sphericalangle BAC|$ a zbývající dva body za dokončení důkazu užitím věty *sus*, kosinové věty či otočením se středem v A. Z těchto posledních dvou bodů může jeden být udělen u neúplného řešení, pokud řešitel uvede, že uvedená shodnost či otočení stačí k dokončení úlohy.

* Užité osové souměrnosti totiž zaručují, že ramena AE, AB, AC, AD, AF leží v tomto pořadí při otáčení kolem vrcholu A.

3. *Dokažte, že pokud pro nějaká kladná celá čísla a, b, c je $3^a \cdot 7^b - 10^c$ kladné dvojmístné číslo, pak je to prvočíslo.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Předpokládejme, že čísla a, b, c jsou přirozená a že $N = 3^a \cdot 7^b - 10^c$ je kladné dvojmístné číslo. Číslo N není dělitelné žádným ze čtyř nejmenších prvočísel 2, 3, 5 a 7, neboť každým z nich je dělitelné právě jedno z čísel $3^a \cdot 7^b$ a 10^c, takže jejich rozdíl jím dělitelný není.

Páté nejmenší prvočíslo je 11. Z rovnosti $11^2 = 121$ plyne, že každé složené číslo, které není dělitelné žádným z prvočísel 2, 3, 5, 7, má alespoň tři číslice.* Naše dvojmístné číslo N tedy není složené, je proto nutně prvočíslo, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Je zřejmé, že dvojmístná čísla tvaru $3^a \cdot 7^b - 10^c$ skutečně existují, například $3 \cdot 7 - 10 = 11$, $3^3 \cdot 7 - 10^2 = 89$, $3 \cdot 7^3 - 10^3 = 29$ apod.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů. V případě neúplného řešení udělte 3 body za pozorování, že N není dělitelné prvočísly z množiny $\{2, 3, 5, 7\}$; v případě, že řešitel zmíní nedělitelnost pouze dvěma z nich, udělte 1 bod, v případě, že ukáže nedělitelnost třemi prvočísly, udělte 2 body (zmínku, že není dělitelné právě jedním z prvočísel, typicky N je liché, nebodujte). Další 3 body udělte za tvrzení, že každé složené dvojmístné číslo je dělitelné aspoň jedním z prvočísel 2, 3, 5 nebo 7 (není-li toto konstatování ničím podloženo, strhněte 1 bod).

* Tento (nebo jemu ekvivalentní) závěr je v úplném řešení nutno objasnit. Lze se přitom odvolat na známý školský poznatek, že každé složené číslo N má alespoň jednoho prvočinitele p, který splňuje nerovnost $p \leqq \sqrt{N}$.