70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

Úlohy klauzurní části I. kola kategorie C

1. Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí

$$2m + 2s(n) = n \cdot s(m) = 70,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a.

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$, v němž K, L značí po řadě středy jeho stran BC, AD. Nechť pata M kolmice z bodu D k přímce AB leží uvnitř strany AB daného rovnoběžníku a nechť N je střed úsečky MB. Dokažte, že $|NK| = |NL|$.

3. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $ab + bc + ca = 1$. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a}.$$

Klauzurní část školního kola kategorie C se koná

v úterý 26. ledna 2021 od 8.30 do 12.30

Soutěžící mají na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů, úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák klauzurní část distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 12.50.

1. *Určete všechny dvojice (m,n) přirozených čísel, pro něž platí*

$$2m + 2s(n) = n \cdot s(m) = 70,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a. (Jaroslav Švrček)

ŘEŠENÍ. Z rovnice $2m + 2s(n) = 70$ upravené na $m + s(n) = 35$ plyne, že $m < 35$, a tudíž $s(m) \leqq 11$ (rovnost nastane pro $m = 29$). Podle rovnice $n \cdot s(m) = 70$ je proto číslo $s(m)$ dělitelem čísla 70, který je nejvýše roven 11, takže $s(m) \in \{1, 2, 5, 7, 10\}$.

Nyní pro každou z hodnot $s(m)$ rovnou 1, 2, 5, 7, 10 dopočítáme postupně hodnoty $n = 70/s(m)$, $s(n)$, $m = 35 - s(n)$ a zapíšeme je do následující tabulky:

$s(m)$	1	2	5	7	10
n	70	35	14	**10**	**7**
$s(n)$	7	8	5	1	7
m	28	27	30	**34**	**28**

Čísla z každého sloupce sice splňují obě zadané rovnice, není však zaručeno, že $s(m)$ je skutečně ciferný součet čísla m. Vidíme, že první tři případy, kdy $s(m) \in \{1, 2, 5\}$, nevedou k žádnému řešení, neboť $s(28) \neq 1$, $s(27) \neq 2$ a $s(30) \neq 5$. Zbylé dva případy, kdy $s(m) = 7$ a $s(m) = 10$, vedou ke dvěma řešením dané úlohy, protože $s(34) = 7$ a $s(28) = 10$. Odpovídající m a n jsou v tabulce vytištěna tučně.

Závěr. Daná úloha má právě dvě řešení, kterými jsou dvojice $(m,n) = (34, 10)$ a $(m,n) = (28, 7)$.

POZNÁMKA. Pokud nerovnost $s(m) \leqq 11$ předem neodvodíme, můžeme úlohu vyřešit postupem z podaného řešení, když přitom dotyčnou tabulku rozšíříme o sloupce pro hodnoty $s(m) \in \{14, 35, 70\}$, tj. zbylé tři dělitele čísla 70:

$s(m)$	14	35	70
n	5	2	1
$s(n)$	5	2	1
m	30	33	34

Tyto možnosti vylučují nerovnosti $s(30) \neq 14$, $s(33) \neq 35$ a $s(34) \neq 70$.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho: 2 body za uvedení všech (předem nevyloučených) možností pro hodnoty $s(m)$ a n z rozkladu $70 = n \cdot s(m)$, 3 body za vyloučení všech nevyhovujících možností; 1 bod za nalezení a ověření obou řešení včetně uvedení správné odpovědi.

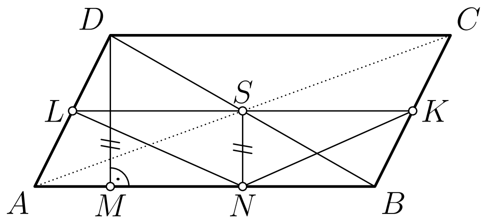
Za pouhé uhodnutí obou vyhovujících dvojic udělte 1 bod.

2. *Je dán rovnoběžník $ABCD$, v němž K, L značí po řadě středy jeho stran BC, AD. Nechť pata M kolmice z bodu D k přímce AB leží uvnitř strany AB daného rovnoběžníku a nechť N je střed úsečky MB. Dokažte, že $|NK| = |NL|$.*

(Vojtěch Zlámal)

Řešení. Označme S průsečík úhlopříček daného rovnoběžníku $ABCD$, tj. jejich společný střed. Bod S je rovněž středem příčky KL, která je navíc rovnoběžná se stranou AB.*

Všimněme si, že v pravoúhlém trojúhelníku BDM je bod S středem přepony BD a bod N je středem odvěsny MB. Úsečka SN je tudíž jeho střední příčka rovnoběžná s odvěsnou DM, takže platí nejen $DM \perp AB$, ale také $SN \perp AB$.



Obr. 1

Nyní ze vztahů $KL \parallel AB$ a $SN \perp AB$ dostáváme $SN \perp KL$. Přímka SN kolmá k úsečce KL prochází jejím středem S, takže je to její osa. Odtud již plyne $|NK| = |NL|$, jak jsme měli dokázat. (Dodejme, že jsme provedenou úvahu mohli zapsat jako úvahu o výšce NS trojúhelníku KLN, který je v jejím důsledku rovnoramenný.)

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho: 2 body za zjištění, že úsečka SN je střední příčkou trojúhelníku BDM; 2 body za důkaz $SN \perp KL$; 1 bod za zdůvodnění, že přímka NS je osa úsečky KL (případně úsečka NS je výška k základně KL rovnoramenného trojúhelníku KLN); 1 bod za odtud plynoucí potřebný závěr.

* Tyto známé poznatky není nutné v řešení dokazovat. Přesto uveďme, že plynou z vlastností středních příček SK a LS v trojúhelnících ABC a ABD.

3. *Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $ab + bc + ca = 1$. Určete, jakých hodnot může nabývat výraz*

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a}.$$

(Josef Tkadlec & Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. S ohledem na podmínku $ab + bc + ca = 1$ upravíme (podobně jako v úloze 4 z domácího kola) nejprve první ze tří sčítanců zkoumaného výrazu

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} = \frac{a(b^2+ab+bc+ca)}{a+b} = \frac{a(b+a)(b+c)}{a+b} = a(b+c) = ab+ca.$$

Analogicky zbývající dva sčítance mají vyjádření

$$\frac{b(c^2+1)}{b+c} = bc+ab \quad \text{a} \quad \frac{c(a^2+1)}{c+a} = ca+bc.$$

Dohromady tak pro součet všech tří zadaných zlomků dostáváme

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a} = (ab+ca)+(bc+ab)+(ca+bc) = 2(ab+bc+ca) = 2,$$

kde jsme opět využili rovnost $ab + bc + ca = 1$ ze zadání úlohy.

Závěr. Daný výraz nabývá pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, která splňují podmínku $ab + bc + ca = 1$, vždy hodnotu 2.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho: 3 body za potřebnou úpravu kteréhokoliv ze tří sčítanců daného výrazu; 2 body za sečtení tří upravených sčítanců (zlomků); 1 bod za uvedení správné odpovědi.

Za nedokázanou hypotézu o jediné hodnotě 2 daného výrazu udělte 1 bod, i když je podpořena konkrétními numerickými výpočty.