70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

Úlohy krajského kola kategorie A

1. Kolik různých čísel může být mezi čísly $a+2b$, $a+2c$, $b+2a$, $b+2c$, $c+2a$ a $c+2b$, jsou-li a, b, c navzájem různá reálná čísla? Najděte všechny možnosti.

2. Určete všechny trojice složených přirozených čísel, z nichž každé je dělitelné součinem superdělitelů zbylých dvou čísel. (Superdělitelem čísla $n > 1$ je jeho největší dělitel d s vlastností $d < n$.)

3. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou D a E vnitřní body strany BC, přitom D leží mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Předpokládejme, že osa úhlu DAE má s osou úsečky BC jediný společný bod, který označíme F. Dokažte rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180°$.

4. Do kruhu je uspořádáno 70 zhasnutých žárovek. Pro libovolnou skupinu žárovek jsme s to připravit přepínač, který změní stav každé žárovky z této skupiny (zhasne rozsvícené a rozsvítí zhasnuté) a ostatní žárovky neovlivní. Jaký je nejmenší počet přepínačů, pomocí nichž je možné rozsvítit libovolnou čtveřici sousedních žárovek (přičemž ostatní budou zhasnuté)?

Krajské kolo kategorie A se koná

v úterý 12. ledna 2021 od 8.30 do 12.30

Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.
Řeší-li žák krajské kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke své nepřetržité kontrole, k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 12.50.

1. *Kolik různých čísel může být mezi čísly $a + 2b$, $a + 2c$, $b + 2a$, $b + 2c$, $c + 2a$ a $c + 2b$, jsou-li a, b, c navzájem různá reálná čísla? Najděte všechny možnosti.*

(Josef Tkadlec)

Řešení. Protože úloha je v proměnných a, b, c symetrická,[?] můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí $a < b < c$. Snadno se přesvědčíme, že pak čtyři ze zkoumaných šesti čísel jsou podle velikosti uspořádány takto:

$$b + 2a < a + 2b < a + 2c < b + 2c. \tag{1}$$

Skutečně, první nerovnost plyne z $(a + 2b) - (b + 2a) = b - a > 0$, druhá nerovnost z $(a + 2c) - (a + 2b) = 2(c - b) > 0$ a třetí z $(b + 2c) - (a + 2c) = b - a > 0$.

Podívejme se, kterým ze čtyř čísel v (1) se mohou rovnat zbylá dvě čísla $c+2a$ a $c+2b$. K tomu si povšimneme, že stejně snadno jako (1) lze dokázat i nerovnosti

$$b + 2a < c + 2a < a + 2c \quad \text{a} \quad a + 2b < c + 2b < b + 2c. \tag{2}$$

Porovnáním s (1) docházíme k závěru, že jediné dvě možné rovnosti mezi zkoumanými šesti čísly (za předpokladu $a < b < c$) jsou $c + 2a = a + 2b$ a $c + 2b = a + 2c$.[?] Obě tyto rovnosti jsou však zřejmě ekvivalentní se stejnou rovností $b = \frac{1}{2}(a+c)$, která je za našeho předpokladu splnitelná.[?]

Výsledek našich úvah pro případ $a < b < c$ lze shrnout následovně:

- Je-li $b = \frac{1}{2}(a + c)$, jsou mezi zkoumanými čísly právě čtyři různá. Platí pro ně totiž

$$b + 2a < a + 2b = c + 2a < a + 2c = c + 2b < b + 2c. \tag{3}$$

  Stane se tak například pro $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.
- Pokud naopak platí $b \neq \frac{1}{2}(a+c)$, tak všech šest zkoumaných čísel je navzájem různých. Tak tomu bude například pro $(a, b, c) = (1, 2, 4)$.

Závěr. Hledaný počet různých čísel v zadané šestici je roven buď 4, nebo 6.

Poznámka. Po výpisu nerovností (1) lze otázku případné rovnosti prvního „zbylého“ čísla $c+2a$ některému z čísel v (1) řešit i bez užití nerovností (2), a to přímým testováním jednotlivých rovností

$$c + 2a = b + 2a, \quad c + 2a = a + 2b, \quad c + 2a = a + 2c, \quad c + 2a = b + 2c.$$

Podobně i pro druhé „zbylé“ číslo $c + 2b$ lze testovat rovnosti

$$c + 2b = b + 2a, \quad c + 2b = a + 2b, \quad c + 2b = a + 2c, \quad c + 2b = b + 2c.$$

Některé z těchto rovností (např. $c + 2a = b + 2a$) jsou vyloučeny už tím, že čísla a, b, c jsou navzájem různá. Ostatní rovnosti (kromě těch z (3)) jsou ve sporu s předpokládaným uspořádáním $a < b < c$ (např. $c + 2a = b + 2c$ znamená, že $a = \frac{1}{2}(b + c)$, tudíž číslo a by leželo mezi čísly b a c.)

[?] Změnou pořadí čísel a, b, c dojde jen ke změně pořadí zkoumaných šesti čísel.

[?] Poznamenejme, že i při zvoleném uspořádání $a < b < c$ má dosavadní výklad několik variant, které spočívají ve vzájemné výměně čísel v jedné nebo v obou z dvojic $(a+2b, c+2a)$ a $(a+2c, c+2b)$ v nerovnostech (1) a (2).

[?] Rovnost $y = \frac{1}{2}(x + z)$ totiž pro navzájem různá čísla x, y, z znamená, že y leží mezi x a z.

Jiné řešení. Při zkoumání potenciálních rovností mezi jednotlivými čísly ze zadané šestice můžeme dospět k následující hypotéze: Pokud se některá dvě z těchto šesti čísel rovnají, pak jedno z čísel a, b, c je aritmetickým průměrem ostatních dvou čísel.

Uvedenou hypotézu lze dokázat mechanickým testováním všech $\binom{6}{2} = 15$ možných rovností. Méně pracný postup založíme na tom, že porovnání libovolného z daných čísel $x + 2y$ s ostatními pěti čísly zapíšeme rovnostmi

$$x+2y = x+2z,\ x+2y = y+2x,\ x+2y = y+2z,\ x+2y = z+2x,\ x+2y = z+2y, \quad (4)$$

kde x, y, z značí čísla a, b, c v některém pořadí. První, druhá a pátá rovnost v (4) odporují tomu, že čísla x, y a z jsou navzájem různá. Třetí rovnost nastane, právě když $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Konečně čtvrtá rovnost je splněna, právě když $y = \frac{1}{2}(x + z)$. Tím je důkaz hypotézy hotov.

Přímým důsledkem dokázané hypotézy je tvrzení: *Pokud žádné z čísel a, b, c není aritmetickým průměrem zbylých dvou čísel, je zkoumaná šestice tvořena šesti různými čísly.*[?]

Zabývejme se tedy situací, kterou předchozí závěr nepostihuje: jedno z čísel a, b, c je rovno aritmetickému průměru zbylých dvou čísel. S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že se jedná o číslo c, pro které tak platí $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Tehdy máme $a = c+d$ a $b = c - d$, kde $d = \frac{1}{2}(a - b) \neq 0$. Po dosazení takových hodnot a, b budou mít čísla ze zadané šestice po řadě vyjádření

$$3c - d, \quad 3c + d, \quad 3c + d, \quad 3c - d, \quad 3c + 2d, \quad 3c - 2d.$$

Díky tomu, že $d \neq 0$, vidíme, že v takové šestici jsou právě čtyři navzájem různá čísla $3c \pm d$ a $3c \pm 2d$. Dospěli jsme tak ke stejnému závěru jako v prvním řešení.

Poznámka. Popišme jiné možnosti, jak posoudit případ $c = \frac{1}{2}(a + b)$ bez zavedení pomocného čísla d. Po dosazení takové hodnoty c získáme pro šestice čísel ze zadání vyjádření

$$a + 2b, \quad 2a + b, \quad b + 2a, \quad 2b + a, \quad \frac{5a + b}{2}, \quad \frac{5b + a}{2}.$$

Čísla $a + 2b$, $2a + b$ jsou zde zastoupena každé dvakrát, takže máme zjistit, kolik různých čísel může být ve čtveřici

$$a + 2b, \quad 2a + b, \quad \frac{5a + b}{2}, \quad \frac{5b + a}{2}.$$

Ukázat, že zde už jsou všechna čísla navzájem různá, lze dosáhnout rutinním testováním všech $\binom{4}{2}$ potenciálních rovností – každá z nich totiž odporuje předpokladu $a \neq b$. Jinou možností je ukázat, že v případě $a < b$ platí

$$\frac{5a + b}{2} < 2a + b < a + 2b < \frac{5b + a}{2},$$

zatímco v opačném případě $a > b$ platí i vypsané ostré nerovnosti naopak.

[?] Že takové trojice (a, b, c) existují, je naprosto zřejmé, a proto není nutné uvádět jejich příklad. Ani v druhé části tohoto řešení nebudeme uvádět příklad trojice (a, b, c) s vlastností $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud jsou popsány podmínky, za kterých je hledaný počet 4, resp. 6, není nutné uvádět konkrétní příklady trojic (a, b, c), je-li splnitelnost těchto podmínek v podaném řešení zřejmá.

V případě postupu podle prvního vzorového řešení udělte: 3 body, pokud řešitel při zvoleném uspořádání najde v zadané šestici čtyři různá čísla (2 body) a zdůvodní jejich různost (1 bod); 3 body za úplnou diskusi o „zbylých“ dvou číslech ze šestice. Pokud řešitel nevyloučí možnost pěti různých čísel, může získat nejvýše 3 body.

V případě postupu podle druhého vzorového řešení udělte: 2 body za důkaz uvedené hypotézy; 1 bod za odtud plynoucí závěr, kdy jsou v zadané šestici všechna čísla navzájem různá; 3 body za vyřešení jednoho z případů typu $c = \frac{1}{2}(a + b)$. V případě drobné chyby v důkazu hypotézy strhněte 1 bod (opomenutí některého z pěti případů).

Za pouhé uhodnutí úplné odpovědi udělte 1 bod, jsou-li ovšem oba počty 4 a 6 podloženy buďto konkrétními příklady trojic (a, b, c), nebo podmínkami, o kterých je navíc ukázáno, že jsou k dosažení počtu 4, resp. 6 postačující.

2. *Určete všechny trojice složených přirozených čísel, z nichž každé je dělitelné součinem superdělitelů zbylých dvou čísel. (Superdělitelem čísla $n > 1$ je jeho největší dělitel d s vlastností $d < n$.)* (Jaromír Šimša)

ŘEŠENÍ. Superdělitele d složeného čísla n dostaneme, když z rozkladu čísla n na prvočinitele vyškrtneme nejmenšího zastoupeného činitele (jednoho, je-li jich více).[?] Proto platí $n = pd$, kde p je prvočíslo s vlastností $p \leqq d$.[?]

Nechť n_1, n_2, n_3 je libovolná hledaná trojice. Podle úvodního odstavce pro superdělitele d_i čísla n_i platí rovnost $n_i = p_i d_i$, kde p_i je prvočíslo a přitom $p_i \leqq d_i$ pro každé $i = 1, 2, 3$. Podle zadání úlohy má platit současně $d_2 d_3 \mid p_1 d_1$, $d_1 d_3 \mid p_2 d_2$ a $d_1 d_2 \mid p_3 d_3$. Vynásobením těchto tří relací dostaneme

$$(d_1 d_2 d_3)^2 \mid p_1 p_2 p_3 d_1 d_2 d_3, \quad \text{neboli} \quad d_1 d_2 d_3 \mid p_1 p_2 p_3.$$

Na druhou stranu, vynásobením tří nerovností $p_i \leqq d_i$ obdržíme $p_1 p_2 p_3 \leqq d_1 d_2 d_3$. Ze závěrů dvou posledních vět plyne, že musí platit rovnost $d_1 d_2 d_3 = p_1 p_2 p_3$. Odtud díky způsobu odvození nerovnosti $p_1 p_2 p_3 \leqq d_1 d_2 d_3$ zjišťujeme, že musí platit rovnost $d_i = p_i$ neboli $n_i = p_i^2$ pro každé $i = 1, 2, 3$. Relace $d_2 d_3 \mid p_1 d_1$ pak znamená, že $p_2 p_3 \mid p_1^2$, takže všechna tři prvočísla p_i se musí rovnat témuž prvočíslu p. Pak platí $d_i = p$ a $n_i = p^2$ pro každé $i = 1, 2, 3$, takže podmínky $d_i d_j \mid n_k^2$ jsou zřejmě splněny v podobě $p^2 \mid p^2$.

Závěr. Řešeními úlohy jsou právě trojice (p^2, p^2, p^2), kde p je libovolné prvočíslo.

JINÉ ŘEŠENÍ. Protože hledaná čísla n_i ($i = 1, 2, 3$) jsou složená, jejich superdělitelé d_i jsou větší než 1. S ohledem na symetrii zadání můžeme dokonce předpokládat, že platí $1 < d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$.

Víme, že $d_1 \mid n_1$ a že podle zadání úlohy rovněž $d_2 d_3 \mid n_1$, a tudíž také $d_2 \mid n_1$ a $d_3 \mid n_1$. Všechna čísla d_1, d_2, d_3 a $d_2 d_3$ tak jsou děliteli čísla n_1, pro které navíc podle našeho předpokladu platí

$$d_1 \leqq d_2 \leqq d_3 < d_2 d_3 \leqq n_1.$$

Protože však d_1 je superdělitel čísla n_1, z posledních nerovností plyne $d_1 = d_2 = d_3$ a $d_2 d_3 = n_1$. Při označení d společné hodnoty čísel d_i tak platí $n_1 = d^2$.

Díky rovnostem $d = d_i$ nyní z relací $d_1 d_3 \mid n_2$ a $d_1 d_2 \mid n_3$ plynou závěry $n_2 = d^2$, resp. $n_3 = d^2$, a to stejným postupem, jako jsme dříve za (slabšího) předpokladu $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$ odvodili závěr $n_1 = d^2$. Každá hledaná trojice (n_1, n_2, n_3) tedy musí mít tvar (d^2, d^2, d^2); vyhovovat přitom budou zřejmě právě ta čísla $d > 1$, která jsou superděliteli čísla d^2. Stane se tak, právě když d bude prvočíslo. Skutečně: je-li d prvočíslo, pak 1, d a d^2 jsou jedinými děliteli čísla d^2, takže d je jeho superdělitelem; je-li naopak číslo d složené, je dělitelné některým prvočíslem $p < d$, takže pd je dělitelem čísla d^2 s vlastností $d < pd < d^2$, což odporuje tomu, že d je superdělitelem čísla d^2. Dospěli jsme tak ke stejnému závěru jako u prvního řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Strhněte ovšem 1 bod, chybí-li závěrečná zkouška (je-li při daném postupu nutná).

U částečných řešení udělte: a) 3 body, pokud řešitel uspořádá tři superdělitele d_i podle velikosti a dokáže jejich rovnost; b) 2 body, pokud řešitel uhodne výsledek a ověří, že trojice (p^2, p^2, p^2) vyhovují;

[?] Podrobněji o určování superdělitelů viz vzorové řešení úlohy 4 z domácího kola.

[?] Fakt, že prvočíslo p musí být *nejmenším* prvočinitelem čísla n, v našem řešení potřebovat nebudeme.

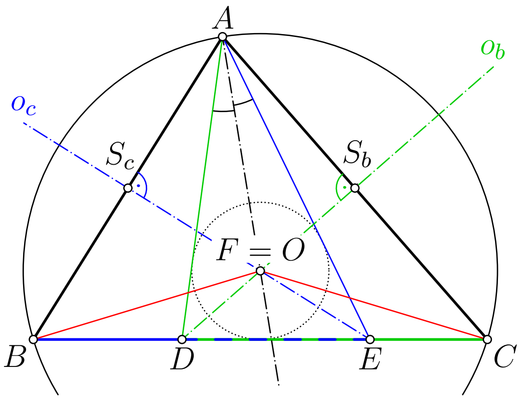
c) 1 bod, pokud řešitel uhodne výsledek (bez jeho ověření) a/nebo uvede poznatek, že každé složené číslo n je tvaru $n = pd$, kde d je superdělitel čísla n a p je nejmenší prvočinitel čísla n, nebo jen prvočíslo s vlastností $p \leqq d$ (lze se přitom odvolat na vzorové řešení úlohy 4 z domácího kola). Zisky za části a), b), c) se přitom nesčítají (bere se největší z nich), pouze za obě části a) a b) náleží dohromady 4 body.

3. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou D a E vnitřní body strany BC, přitom D leží mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Předpokládejme, že osa úhlu DAE má s osou úsečky BC jediný společný bod, který označíme F. Dokažte rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180°$.* (Patrik Bak)

Řešení. V celém textu budeme používat standardní značení α, β, γ velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Klíčovým bodem postupu bude zjištění, že bod F je totožný se středem kružnice opsané trojúhelníku ABC, který označíme O. V první části řešení tento poznatek dokážeme dvěma způsoby.

1. způsob. Díky předpokladu $|AD| = |CD|$ je osa o_b strany AC totožná s osou úhlu CDA, a tedy i s osou úhlu EDA.[?] Analogicky osa o_c strany AB je totožná s osou úhlu AED. Tato dvojí role obou os vede k závěru, že střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC je současně středem kružnice vepsané trojúhelníku ADE. Odtud plyne, že polopřímka AO je osou úhlu DAE. Zároveň však platí $|OB| = |OC|$, takže bod O je společným bodem osy úhlu DAE a osy úsečky BC. Podle zadání je ovšem jejich společný bod jediný a má označení F, takže skutečně platí $F = O$.

2. způsob. Jinou úvahou znovu dokážeme, že polopřímka AO je osa úhlu DAE, odkud už stejně jako při 1. způsobu vyplyne závěr o rovnosti $F = O$. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$, takže z rovnoramenného trojúhelníku ABO pak máme $|\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle BAO| = 90° - \gamma$. Dále v rovnoramenném trojúhelníku ACD platí $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACD| = \gamma$, tudíž $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle DAC| = \alpha - \gamma$. Dohromady dostáváme $|\sphericalangle DAO| = |\sphericalangle BAO| - |\sphericalangle BAD| = (90° - \gamma) - (\alpha - \gamma) = 90° - \alpha$.[?] Analogickou cestou přes trojúhelníky ACO a ABE obdržíme rovnost $|\sphericalangle EAO| = 90° - \alpha$. Dokázaná shodnost úhlů DAO a EAO potvrzuje, že polopřímka AO je skutečně osou úhlu DAE.



Obr. 1

V druhé části řešení zbývá dokázat rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180°$, kterou přepíšeme do tvaru $|\sphericalangle DFE| = 180° - \alpha$. To půjde udělat obzvláště snadno, pokud kromě dokázané rovnosti $F = O$ využijeme opět osy o_b, o_c úseček AC, resp. AB, jejichž středy označíme S_b, resp. S_c jako na obrázku. Kromě toho uvedeme dva postupy bez užití těchto os.

[?] Ze zadání úlohy totiž plyne, že bod E leží mezi body C a D.

[?] Velikosti úhlů BAO a BAD jsme od sebe odečetli ve správném pořadí, neboť díky zadání úlohy platí $90° - \alpha > 0$.

1. způsob. Body S_b, F, D leží v tomto pořadí na ose o_b, stejně jako body S_c, F, E na ose o_c. Kromě toho platí $FS_b \perp AC$ a $FS_c \perp AB$, takže ze čtyřúhelníku AS_bFS_c plyne, že jeho vnitřní úhel S_bFS_c má velikost $180° - \alpha$. Stejnou velikost má proto i vrcholový úhel DFE, jak jsme potřebovali ukázat. Dodejme, že velikost $180° - \alpha$ úhlu DFE lze vypočítat rovněž z trojúhelníku DEF, ve kterém totiž díky osám o_b, o_c platí rovnosti $|\sphericalangle FDE| = 90° - \gamma$ a $|\sphericalangle FED| = 90° - \beta$.

2. způsob. Všimněme si, že čtyřúhelník $BDFA$ je tětivový, neboť podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí $|\sphericalangle AFB| = 2\gamma$ a rovněž vnější úhel ADB rovnoramenného trojúhelníku ACD má velikost 2γ. Analogicky je také čtyřúhelník $AFEC$ tětivový. Ze čtyřúhelníků $BDFA$ a $AFEC$ tak plynou rovnosti $|\sphericalangle AFD| = 180° - \beta$ a $|\sphericalangle AFE| = 180° - \gamma$. Jejich dosazením do $|\sphericalangle DFE| = 360° - |\sphericalangle AFD| - |\sphericalangle AFE|$ již získáme $|\sphericalangle DFE| = \beta + \gamma = 180° - \alpha$.

3. způsob. Místo rovnosti $F = O$ využijeme dříve rovněž dokázaný poznatek o tom, že bod F je středem kružnice vepsané trojúhelníku ADE. Podle známého vzorce to znamená, že $|\sphericalangle DFE| = 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle DAE|$.[?] Poslední úhel bude mít potřebnou velikost $180° - \alpha$, pokud ověříme, že $|\sphericalangle DAE| = 180° - 2\alpha$. To je snadné: díky rovnoramenným trojúhelníkům ACD, ABE platí $|\sphericalangle CAD| = \gamma$, resp. $|\sphericalangle BAD| = \beta$, odkud již $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle BAE| - |\sphericalangle ABC| = \gamma + \beta - \alpha = 180° - 2\alpha$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho: 4 body za důkaz, že bod F je totožný se středem O kružnice opsané trojúhelníku ABC; 2 body za důkaz úhlové rovnosti ze závěru zadání.

V případě neúplných řešení udělte 1 bod za hypotézu o totožnosti bodů F a O. Pokud řešitel dokáže úhlovou rovnost použitím nedokázané hypotézy $F = O$, udělte celkem 3 body.

Žádný bod neudělujte ani za nedokázanou hypotézu, že $ABDF$ je (stejně jako $ACEF$) tětivový čtyřúhelník, ani za důkaz, že $ABDO$ a $ACEO$ jsou tětivové čtyřúhelníky.

[?] Plyne to z výpočtu $|\sphericalangle DFE| = 180° - |\sphericalangle EDF| - |\sphericalangle FED| = 180° - \frac{1}{2}|\sphericalangle EDA| - \frac{1}{2}|\sphericalangle AED| = 180° - \frac{1}{2}(|\sphericalangle EDA| + |\sphericalangle AED|) = 180° - \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle DAE|) = 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle DAE|$.

4. *Do kruhu je uspořádáno* 70 *zhasnutých žárovek. Pro libovolnou skupinu žárovek jsme s to připravit přepínač, který změní stav každé žárovky z této skupiny (zhasne rozsvícené a rozsvítí zhasnuté) a ostatní žárovky neovlivní. Jaký je nejmenší počet přepínačů, pomocí nichž je možné rozsvítit libovolnou čtveřici sousedních žárovek (přičemž ostatní budou zhasnuté)?* (Martin Melicher)

Řešení. Očíslujme žárovky $1, 2, \ldots, 70$ v pořadí po hranici kruhu. S čísly žárovek budeme počítat „cyklicky", tj. jako se zbytkovými třídami modulo 70 (takže např. $68+3$ je rovno 1). Písmenem i budeme značit libovolné celé číslo od 1 do 70. Spojení „rozsvítit danou skupinu čísel" bude znamenat rozsvítit všechny žárovky s čísly z této skupiny a žádné jiné. V závěrečné poznámce a pokynech k bodování budeme psát o „sudých" a „lichých" žárovkách podle jejich čísel.

Předpokládejme, že máme dánu skupinu přepínačů, kterou jsme schopni rozsvítit každou čtveřici $\{i, i+1, i+2, i+3\}$. Ukážeme, že v takové skupině je alespoň 68 přepínačů.

Protože umíme rozsvítit obě čtveřice $\{i, i+1, i+2, i+3\}$ a $\{i+1, i+2, i+3, i+4\}$, spojením obou odpovídajících postupů docílíme rozsvícení dvojice $\{i, i+4\}$. Tím pádem umíme rozsvítit každou z dvojic

$$\{i, i+4\},\ \{i+4, i+8\},\ \{i+8, i+12\}, \ldots,\ \{i+68, i+72\},$$

takže spojením odpovídajících postupů docílíme rozsvícení dvojice $\{i, i+72\}$, tj. dvojice $\{i, i+2\}$.

Zvolme nyní za d libovolné přirozené číslo menší než 35. Protože umíme rozsvítit každou z d dvojic

$$\{i, i+2\},\ \{i+2, i+4\},\ \{i+4, i+6\},\ \ldots,\ \{i+2d-2, i+2d\},$$

spojením odpovídajících postupů docílíme rozsvícení dvojice $\{i, i+2d\}$.

Získané dvojice $\{i, i+2d\}$ reprezentují všechny dvojprvkové množiny čísel (od 1 do 70) téže parity. Protože jsme schopni rozsvítit každou z nich, můžeme opakovaným rozsvěcováním po dvojicích rozsvítit libovolnou množinu $M \subseteq \{1, \ldots, 70\}$, která obsahuje sudý počet sudých čísel a zároveň sudý počet lichých čísel (počítáme i prázdnou množinu M, kterou jsme také schopni „rozsvítit"). Určíme počet všech takových množin M.

Sudá čísla od 1 do 70 tvoří 35prvkovou množinu, která má právě 2^{34} podmnožin se sudým počtem prvků.[?] Stejně tak lichá čísla od 1 do 70 tvoří 35prvkovou množinu, která má právě 2^{34} podmnožin se sudým počtem prvků. Hledaný počet množin M z předchozího odstavce je proto $2^{34} \cdot 2^{34} = 2^{68}$.

Protože daná skupina přepínačů umožňuje dosáhnout alespoň 2^{68} různých stavů rozsvícení, je v ní alespoň 68 přepínačů,[?] jak jsme slíbili dokázat.

Zbývá uvést příklad skupiny 68 přepínačů, kterými lze rozsvítit každou čtveřici $\{i, i+1, i+2, i+3\}$. K tomu označme jako $[p, q]$ přepínač, který změní stav právě dvou žárovek, totiž těch s čísly p a q. Ukažme, že skupina 68 takových přepínačů

$$[1,3],\ [2,4],\ [3,5],\ \ldots,\ [66,68],\ [67,69],\ [68,70]$$

[?] Viz vzorové řešení příkladu 6 z domácího kola, kde bylo dokázáno, že každá n-prvková množina má právě 2^{n-1} podmnožin se sudým počtem prvků.

[?] Ve vzorovém řešení příkladu 6 z domácího kola bylo zdůvodněno, že užitím k přepínačů lze dosáhnout nejvýše 2^k různých stavů rozsvícení.

našemu zadání vyhovuje. Jistě jimi rozsvítíme kteroukoli dvojici $\{i, i+2\}$ s dvěma výjimkami, kdy $i = 69$ a $i = 70$.

Užitím přepínačů $[1,3], [3,5], \ldots, [67,69]$ rozsvítíme ve výsledku dvojici $\{1, 69\}$, tj. dvojici $\{i, i+2\}$ pro $i = 69$. Podobně užitím přepínačů $[2,4], [4,6], \ldots, [68,70]$ rozsvítíme dvojici $\{i, i+2\}$ pro $i = 70$. Umíme tedy rozsvítit každou dvojici $\{i, i+2\}$, a tím pádem i každou čtveřici $\{i, i+1, i+2, i+3\}$ (rozsvítíme po sobě dvojice $\{i, i+2\}$ a $\{i+1, i+3\}$).

Poznámka. K jiné konstrukci vyhovujících 68 přepínačů lze využít příklad 6 domácího kola, ve kterém jsme vlastně sestrojili $n-1$ přepínačů pro množinu n žárovek tak, aby jimi šlo rozsvítit každou skupinu se sudým počtem žárovek (nebylo podstatné, že v příkladu bylo konkrétní $n = 70$ sudé). Podle toho si tak nyní připravíme 34 přepínačů pro našich 35 sudých žárovek a 34 přepínačů pro našich 35 lichých žárovek. Každá čtveřice sousedních žárovek je zřejmě složena z dvojice sudých a dvojice lichých žárovek, je ji proto možné rozsvítit.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho: 3 body za důkaz, že pokud lze rozsvítit každou čtveřici sousedních žárovek, tak lze rozsvítit libovolnou skupinu žárovek se sudým počtem sudých žárovek a sudým počtem lichých žárovek; 1 bod za důkaz, že takových skupin žárovek je 2^{68} (je možné se odvolat na tvrzení z domácího kola o počtu těch podmnožin dané množiny, které mají sudý počet prvků); 1 bod za zdůvodnění, že potřebujeme aspoň 68 přepínačů (je možné se odvolat na argumentaci z domácího kola); 1 bod za příklad vyhovující skupiny 68 přepínačů (lze si přitom pomoci odvoláním se na konstrukci z domácího kola), je-li ovšem zdůvodněno, že navržená skupina přepínačů je skutečně vyhovující