Úlohy krajského kola kategorie B

1. a) Dokažte nerovnost $4(a^2+b^2) > (a+b)^2+ab$ pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

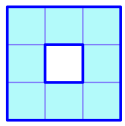
b) Najděte nejmenší reálné číslo k takové, aby nerovnost $k(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2+ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

2. Pro každé kladné celé číslo k označme d_k počet jednociferných dělitelů čísla k. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n platí

$$\frac{d_1+d_2+\ldots+d_n}{n} < 3.$$

3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$.

4. Na hracím plánu o rozměrech 9×9 čtverečků je umístěna loď tvořená osmi čtverečky po obvodu čtverce 3×3 (na obrázku je loď vybarvena).



a) Na kolik čtverečků musíme vystřelit, abychom měli jistotu, že loď zasáhneme aspoň na dvou různých místech? O prvním zásahu se přitom nedozvíme.

b) Stačí stejný počet výstřelů i pro hrací plán o velikosti 11×9?

Krajské kolo kategorie B se koná

v úterý 30. března 2021 od 8.30 do 12.30

Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák krajské kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke své nepřetržité kontrole, k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 12.50.

1. *a) Dokažte nerovnost* $4(a^2+b^2) > (a+b)^2+ab$ *pro všechny dvojice kladných reálných čísel* a, b.

b) Najděte nejmenší reálné číslo k *takové, aby nerovnost* $k(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2+ab$ *platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel* a, b. (Ján Mazák)

ŘEŠENÍ. a) Po roznásobení dostaneme ekvivalentní nerovnost $4a^2+4b^2 > a^2+b^2+3ab$, kterou ještě upravíme do tvaru $3a^2+3b^2 > 3ab$, v němž ji dokážeme. Pokud je $a \geqq b > 0$, pak $3a^2 \geqq 3ab$ a $3b^2 > 0$. Sečtením těchto dvou nerovností už dostaneme dokazovanou nerovnost. Pokud je naopak $b \geqq a$, postupujeme analogicky (nebo se jen odvoláme na symetrii).

Jinou možností je například vyjít ze zřejmé nerovnosti $3(a-b)^2 \geqq 0$, kterou upravíme do tvaru $3a^2+3b^2 \geqq 6ab$. Jistě platí $6ab > 3ab$ (protože obě čísla a, b jsou kladná), a tak dohromady dostáváme $3a^2+3b^2 \geqq 6ab > 3ab$ a jsme hotovi.

b) Zadanou nerovnost ekvivalentně upravíme do tvaru $(k-1)(a^2+b^2) \geqq 3ab$. Dosazením $a = b = 1$ dostaneme $2(k-1) \geqq 3$ neboli $k \geqq 5/2$, a tak každé vyhovující číslo k je nutně alespoň $5/2$ (v případě $k < 5/2$ zadaná nerovnost neplatí například pro dvojici $a = b = 1$)*. Pro $k = 5/2$ přitom máme

$$(k-1)(a^2+b^2) = \frac{3}{2}(a^2+b^2) \geqq \frac{3}{2} \cdot 2ab = 3ab,$$

kde jsme využili obecně platnou nerovnost $a^2+b^2 \geqq 2ab$, která je přepisem zřejmé nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$.** Došli jsme k závěru, že hledané nejmenší k je rovno $5/2$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za část a) a 4 body za část b). V části b) udělte 1 bod za nalezení hledané konstanty $k = 5/2$ (i v případě, že je uhodnuta), další 2 body za důkaz nerovnosti pro $k = 5/2$ a 1 bod za zdůvodnění, že pro $k < 5/2$ nerovnost obecně neplatí.

* V úplném řešení stačí uvést jednu takovou dvojici, i když požadovanou vlastnost čísla $k < 5/2$ vyvrací například i každá jiná dvojice sobě rovných kladných čísel a, b.

** Lze se rovněž odvolat na AG-nerovnost $\frac{1}{2}(u+v) \geqq \sqrt{uv}$ pro kladná čísla $u = a^2$ a $v = b^2$.

2. *Pro každé kladné celé číslo k označme d_k počet jednociferných dělitelů čísla k. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n platí*

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{n} < 3.$$

(Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Uvažujme jednociferné číslo d. Podíváme se, kolikrát číslo d jako dělitel přispívá do součtu $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Například d rovné pěti přispívá jedničkou číslům $d_5, d_{10}, d_{15}, \ldots$, ostatním číslům nepřispívá. Odtud je jasné, že každé d přispívá do součtu $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ číslem $\lfloor n/d \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x. Sečtením těchto příspěvků pro $d = 1, 2, \ldots, 9$ tak dostaneme vyjádření

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \sum_{d=1}^{9} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor. \tag{1}$$

Uplatníme-li nyní zřejmou nerovnost $\lfloor x \rfloor \leqq x$ pro čísla $x = n/d$, bude nám k vyřešení úlohy stačit dokázat druhou z nerovností

$$\frac{1}{n}(d_1 + d_2 + \ldots + d_n) \leqq \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{9} \frac{n}{d} < 3. \tag{2}$$

Ta po zkrácení čísla n přejde do tvaru

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9} < 3. \tag{3}$$

Místo rutinního výpočtu levé strany nerovnosti (7129/2520) si můžeme všimnout, že platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= 1, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{2}{4} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < \frac{3}{7} &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sečtením těchto tří nerovností a přičtením jedničky k oběma stranám již dostáváme potřebnou nerovnost (3) dokonce téměř bez počítání.

POZNÁMKA. Užití funkce $y = \lfloor x \rfloor$ v podaném řešení není nezbytné: Příspěvky dělitelů d do součtu $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ lze rovnou zřejmě odhadnout shora zlomky n/d a pak jejich sečtením přímo dospět k první z nerovností (2).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho: 3 body za myšlenku, že pro daný dělitel d se podíváme na jeho příspěvek do součtu $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ (jde o metodu počítání jednoho množství, v daném případě platných relací $d \mid k$ ($d = 1, 2, \ldots, 9$, $k = 1, 2, \ldots, n$), dvěma způsoby); další 2 body za odvození první nerovnosti v (2) (z toho 1 bod za vyjádření (1), volí-li řešitel tuto cestu); 1 bod za jakékoli správné ověření nerovnosti (3).

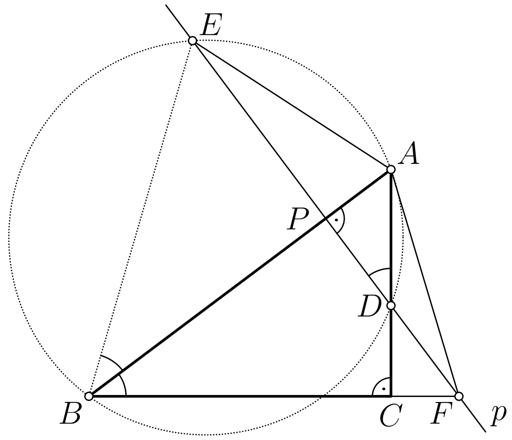
3. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$.* (Jaroslav Švrček)

Řešení. Označme P patu kolmice p z bodu D k přeponě AB uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku ABC.*

Čtyřúhelník $AEBD$ je tětivový, takže podle vlastnosti obvodových úhlů platí $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ADE|$. Všimněme si dále, že pravoúhlé trojúhelníky ABC a ADP mají společný ostrý vnitřní úhel při vrcholu A, a tak mají shodné ostré vnitřní úhly i při vrcholech B a D. Dohromady dostáváme

$$|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ABE|.$$

Dokázaná shodnost úhlů ABF, ABE neboli úhlů PBF, PBE pro trojúhelník EBF znamená, že jeho výška BP leží na ose vnitřního úhlu při vrcholu B. Tento trojúhelník je tudíž rovnoramenný a přímka BP je osou jeho základny EF.** Protože bod A na této ose leží také, platí rovnost $|AE| = |AF|$, kterou jsme měli dokázat. (Navíc jsme ukázali, že čtyřúhelník $AEBF$ je deltoid.)

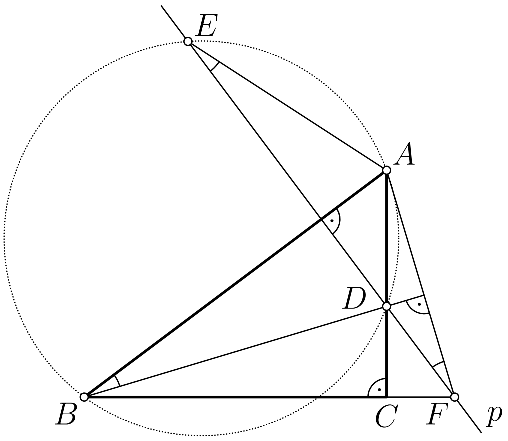


Jiné řešení. Bod D je ortocentrem ostroúhlého trojúhelníku ABF, neboť je průsečíkem jeho výšky AC s výškou z vrcholu F, která totiž leží na přímce p. Odtud plyne $BD \perp AF$, a proto oba úhly ABD a AFD jsou doplňky téhož úhlu BAF do 90°, tudíž jsou shodné. S úhlem ABD je navíc shodný i úhel AED, protože jde o obvodové úhly nad tětivou AD kružnice opsané čtyřúhelníku $AEBD$. Dohromady dostáváme $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle AFD|$ neboli $|\sphericalangle AEF| = |\sphericalangle AFE|$, což znamená, že trojúhelník

* Na přímce p tak uvažujeme celkem 4 body, které jsou zřejmě v pořadí E, P, D, F, což není v řešení nutné ani zmiňovat, natož dokazovat.

** Tento ze školní výuky známý závěr, který plyne ze shodnosti trojúhelníků BPE a BPF podle věty *usu*, není třeba v řešení dokazovat.

AEF je rovnoramenný, tj. skutečně platí $|AE| = |AF|$.

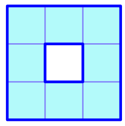


Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů.

Při postupu z prvního řešení udělte: 2 body za důkaz rovnosti $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ABE|$; 2 body za zdůvodnění rovnosti $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ABF|$; 2 body za úvahu vedoucí od dokázaných rovností úhlů k rovnosti $|AE| = |AF|$.

Při postupu z druhého řešení udělte: 2 body za důkaz rovnosti $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle ABD|$; 3 body za zdůvodnění rovnosti $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle AFD|$ (z toho 1 bod za pozorování, že bod D leží na dvou výškách trojúhelníku ABF a 1 bod za odtud plynoucí závěr $BD \perp AF$); 1 bod za úvahu vedoucí od dokázaných rovností úhlů k rovnosti $|AE| = |AF|$. Po zjištění, že bod D je ortocentrem trojúhelníku ABF, lze řešení rovněž dokončit užitím obecného poznatku, že kružnice opsané trojúhelníkům ABF a ABD jsou souměrně sdružené podle přímky AB. Řešitel to může prohlásit za známé a nedokazovat.

Body z obou postupů řešení se nesčítají. V případě, že řešitel naznačí obě cesty, ale ani jednu nedokončí, hodnoťte tu cestu, na které posbírá více bodů. Pokud například řešitel dokáže jak rovnost $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle ABE|$, tak rovnost $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle ABD|$, získává za to pouze 2 body. Pokud k tomu ještě kupříkladu dokáže, že $BD \perp AF$, získává již 4 body.

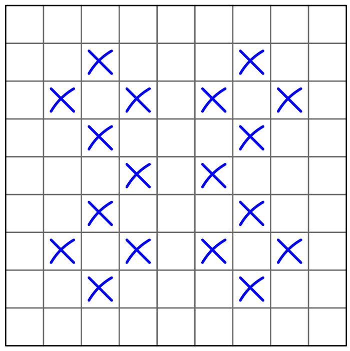


4. *Na hracím plánu o rozměrech* 9×9 *čtverečků je umístěna loď tvořená osmi čtverečky po obvodu čtverce* 3×3 *(na obrázku je loď vybarvena).*

a) Na kolik čtverečků musíme vystřelit, abychom měli jistotu, že loď zasáhneme aspoň na dvou různých místech? O prvním zásahu se přitom nedozvíme.

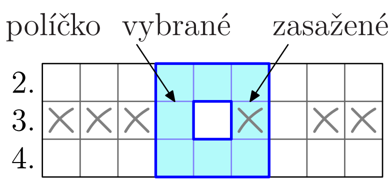
b) Stačí stejný počet výstřelů i pro hrací plán o velikosti 11×9*?* (Tomáš Bárta)

Řešení. a) Čtverec 9×9 rozdělíme na 9 čtverců 3×3. Do každého z nich musíme určitě vystřelit aspoň dvakrát, tj. celkem potřebujeme aspoň 18 výstřelů. Příklad na obrázku ukazuje, že 18 výstřelů stačí.



b) Předpokládejme nyní, že máme k dispozici 18 výstřelů na hrací plán 11×9 tvořený 11 řádky a 9 sloupci. Řádky označme pořadovými čísly 1 až 11.

Do libovolných tří sousedních řádků se vejdou tři nepřekrývající se lodě, na které tudíž potřebujeme aspoň 6 výstřelů. Takže 6 výstřelů potřebujeme jak na sousední řádky 6, 7 a 8, tak i na sousední řádky 9, 10 a 11. Na prvních pět řádků nám tedy zbývá nejvýše 6 výstřelů. Přitom v řádcích 1, 2 a 3 musí být aspoň 6 zásahů, stejně jako ve řádcích 3, 4 a 5. Odtud plyne, že v prvních pěti řádcích musí všech 6 zásahů ležet v 3. řádku. Vždy tak některé jeho políčko zůstane nezasaženo. Umístěme loď do řádků 2, 3 a 4 tak, aby „procházela“ *vybraným* nezasaženým políčkem 3. řádku. Loď je pak zasažena nejvýše jednou (neboť zásahy ve 2. i 4. řádku jsme vyloučili), viz obrázek. Tím jsme dokázali, že 18 výstřelů pro hrací plán 11×9 nestačí.

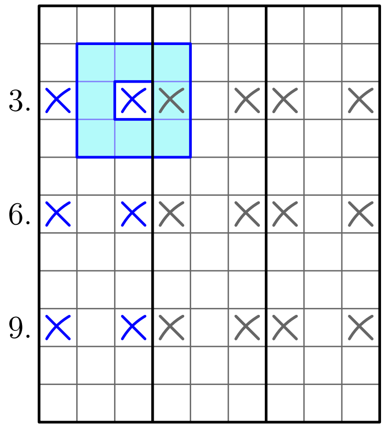


Jiné řešení. Popišme odlišný postup pro část b). Znovu předpokládejme, že máme k dispozici 18 výstřelů na hrací plán 11×9, tvořený 11 řádky a 9 sloupci. Řádky opět označíme pořadovými čísly 1 až 11. Rozdělme plán na tři části o rozměrech 11×3. Vyznačili jsme je na dalším obrázku spolu se všemi 18 zásahy, jejichž způsob rozmístění je, jak ukážeme, zadáním úlohy vynucen. K tomu budeme v následujícím odstavci potřebovat pouze lodě, z nichž každá leží celá v jedné ze tří vymezených částí.*

* Toto konstatování je důležité pro důkaz uvedený v poznámce za řešením.

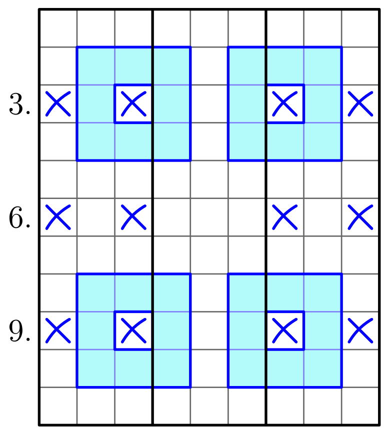
Z celkového počtu 18 zásahů jich musí být 6 v každé ze tří uvažovaných částí, neboť do jakékoli její podčásti 9×3 se vejdou tři nepřekrývající se lodě. Zvolíme-li navíc tyto podčásti v řádcích 3 až 11, resp. 1 až 9, zjistíme, že žádný zásah se nemůže vyskytovat v řádcích 1, 2, 10 a 11. Proto v každé ze tří uvažovaných částí musí být po 2 zásazích v řádcích 3 a 9 – kvůli lodím v řádcích 1 až 3, resp. 9 až 11. Zbývající 2 zásahy pak musí být v řádku 6 – kvůli lodi v řádcích 4 až 6 a lodi v řádcích 6 až 8. Určené dvojice zásahů v řádcích 3, 6, 9 musí být ovšem rozmístěny jako na obrázku – kvůli lodím v trojicích řádků 2 až 4, 5 až 7, 8 až 10.

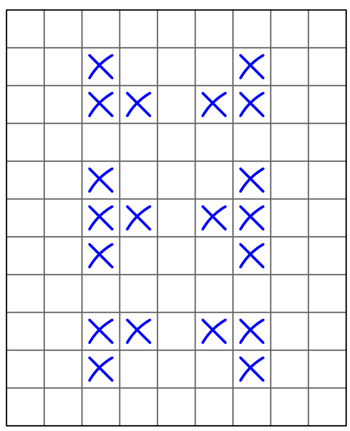
Příklad lodi vykreslené na obrázku dokazuje, že 18 výstřelů na celý hrací plán 11×9 nestačí.



Poznámka. Využijme poznatky z druhého řešení ke krátkému důkazu, že ani 19 výstřelů pro hrací plán 11×9 nestačí.

Rozdělme opět hrací plán na tři části 11×3. Podle druhého řešení musí být všech 19 výstřelů rozděleno do těchto částí v počtech 6, 6 a 7. Dvě části s 6 zásahy, jejichž nutné rozmístění podle druhého řešení známe, nemohou být sousední, neboť v opačném případě bychom podle předchozího obrázku našli loď s pouze jedním zásahem. Část se 7 zásahy je tedy prostřední a v každé z obou krajních částí je nutné rozmístění 6 zásahů známé – viz další obrázek vlevo. Jsou na něm navíc vykresleny 4 lodě, které vedou k závěru, že v prostřední části by muselo být aspoň 8 zasažených políček, a to je spor.





Příklad z obrázku vpravo dosvědčuje, že 20 výstřelů na hrací plán 11×9 už stačí.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za část a) a 3 body za část b).

V části a) udělte 1 bod za úvahu, proč 17 výstřelů nestačí, a 2 body za vyhovující příklad 18 výstřelů.

Za část b) mohou získat body pouze ti řešitelé, kteří se rozhodnou zdůvodňovat, že 18 výstřelů nestačí (ale za zformulování této hypotézy žádný bod ještě neudělujte).

Při postupu z části b) prvního řešení, založeném na úvahách o celých řádcích, udělte: 1 bod za důkaz existence 5 sousedních řádků s nejvýše 6 zásahy; další 1 bod za zdůvodnění, že mezi těmito 5 řádky existuje řádek, který z nich není krajní a jehož oba sousední řádky jsou bez zásahu; 1 bod za určení polohy lodi, která vede ke sporu.

Při postupu z druhého řešení udělte: 2 body za odvození nutného rozmístění 6 zásahů v každé ze tří částí 11×3 (za pouhé zjištění, že v každé části je právě 6 zásahů, udělte 1 bod, jen když jsou navíc vyloučeny zásahy v prvních dvou i posledních dvou řádcích); 1 bod za určení polohy lodi, která vede ke sporu.

Body z obou postupů řešení se nesčítají, výsledkem je maximum z obou počtů. U jiných neúplných postupů je možné udělit například 1 bod za odvození, že v některé části 5×3 (jedné nebo i více) jsou jen dva zásahy a oba leží v prostředním z jejích pěti řádků. U takových postupů je možné udělit 2 body jen v případech, kdy je jasné, že postup lze úspěšně dokončit a řešiteli k tomu zbývalo udělat málo (stejně jako u pokynů výše pro dva popsané postupy). Za triviálnější zjištění (například: první dva i poslední dva řádky jsou bez zásahu) žádný bod neudělujte.