70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Určete všechna přirozená čísla n, pro něž platí

$$n + p(n) = 70,$$

kde $p(n)$ značí *součin* všech číslic čísla n.

2. Určete, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou obarvena jako pole šachovnice, vyplnit čísly 2 a -1 tak, že současně platí:
(i) součet všech čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky je roven 0,
(ii) součet čísel na všech černých polích tabulky se rovná součtu čísel na všech jejích bílých polích.

3. Je dán trojúhelník ABC, v němž D, E jsou po řadě středy jeho stran BC, AB. Nechť F je střed úsečky BE a G vnitřní bod strany AC, pro nějž platí $|AG| = 3\,|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek DF a GE leží na té rovnoběžce s přímkou BC, která prochází bodem A.

4. Nechť a, b jsou libovolná kladná reálná čísla, pro něž platí $a^2 + b^2 = 1$. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$\frac{a^2(a+b^3)}{b-b^3} + \frac{b^2(b+a^3)}{a-a^3}$$

a určete, pro které uvažované dvojice a, b je tato hodnota dosažena.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 30. března 2021 od 8.30 do 12.30

Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.
Řeší-li žák krajské kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke své nepřetržité kontrole, k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 12.50.

1. *Určete všechna přirozená čísla n, pro něž platí*

$$n + p(n) = 70,$$

kde $p(n)$ značí součin *všech číslic čísla n.* (Jaroslav Švrček)

Řešení. Nejdříve si uvědomíme, že každé hledané číslo n musí být dvojmístné. Skutečně, pro jednomístné číslo n platí $n + p(n) = 2n \leqq 18$ a zároveň ze zadané rovnice $n + p(n) = 70$ zřejmě plyne dokonce $n \leqq 70$.

Dosaďme nyní dvojmístné $n = \overline{ab}$ s první číslicí $a \leqq 7$ do rovnice a rovnou ji upravme na součinový tvar

$$n + p(n) = (10a + b) + ab = 70, \quad \text{po úpravě} \quad (a + 1)(b + 10) = 80.$$

Protože $2 \leqq a + 1 \leqq 8$ a současně $10 \leqq b + 10 \leqq 19$, lze číslo $80 = 2^4 \cdot 5$ rozložit na součin dvou činitelů $a+1$, $b+10$ pouze dvěma způsoby, a to jako $5 \cdot 16$ nebo $8 \cdot 10$ (podle toho, ve kterém činiteli je zastoupen prvočinitel 5). V prvním případě je $a = 4$ a $b = 6$, ve druhém $a = 7$ a $b = 0$.

Závěr. Jediná dvě vyhovující čísla jsou $n = 46$ a $n = 70$.

Poznámka. Rovnici $(10a+b)+ab = 70$ lze řešit rovněž tak, že jednu z neznámých a, b vyjádříme lomeným výrazem pomocí druhé a pak provedeme příslušné dělení dvojčlenů (se zbytkem), například

$$b = \frac{70 - 10a}{a + 1} = -10 + \frac{80}{a + 1}.$$

Nyní už stačí jen zjistit, pro která $a \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ platí $(a + 1) \mid 80$ a současně odpovídající b leží v $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Dodejme, že rovnici $(10a + b) + ab = 70$ s neznámými číslicemi a, b lze řešit ještě kratším postupem. Upravíme ji do tvaru $b(a + 1) = 10(7 - a)$, podle kterého je aspoň jedno z čísel b, $a + 1$ dělitelné pěti. Musí tedy nastat některý z případů $b = 0$, $b = 5$, $a = 4$ či $a = 9$. Zbytek řešení je nasnadě.

Jiné řešení. Je-li $n \leqq 39$, pak $n + p(n) \leqq 39 + 3 \cdot 9 = 66$, takže pro každé hledané n musí platit $n \geqq 40$. Na druhou stranu, z rovnice $n + p(n) = 70$ plyne $n \leqq 70$, přitom hodnota $n = 70$ zřejmě vyhovuje. Zbývá tak posoudit dvojmístná čísla n s desítkovou číslicí 4, 5 a 6. Jejich jednotkovou číslici označme b jako dříve.

- $40 \leqq n \leqq 49$: Má platit $(40 + b) + 4b = 70$ neboli $5b = 30$, odkud $b = 6$.
- $50 \leqq n \leqq 59$: Má platit $(50 + b) + 5b = 70$ neboli $6b = 20$, avšak 6 nedělí 20.
- $60 \leqq n \leqq 69$: Má platit $(60 + b) + 6b = 70$ neboli $7b = 10$, avšak 7 nedělí 10.

Došli jsme k témuž závěru jako v prvním řešení: vyhovují pouze čísla 46 a 70.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho: 1 bod za převod zadané rovnice na rovnici pro dvě neznámé číslice čísla n (přitom konstatování, že n je dvojmístné, lze považovat za zřejmé, tj. může být uvedeno bez zdůvodnění); 4 body za úplné vyřešení této rovnice (přitom za drobné chyby či neúplnost strhněte 1–2 body); 1 bod za uvedení závěrečné odpovědi.

K hodnocení řešení podobných tomu z druhého řešení, kdy se řešitel rozhodne pro postupné testování dvojmístných čísel (po desítkách nebo dokonce jednotlivě): Pokud takové testování, které musí být podle regulí MO písemně doloženo, není úplné či obsahuje numerické chyby, udělte nejvýše 5 bodů.

Za nalezení *obou* hledaných čísel n bez zdůvodnění, proč jiná neexistují, udělte 1 bod. Tento bod lze přičíst pouze k 1 bodu za převod zadané rovnice na rovnici pro dvě neznámé číslice.

2. *Určete, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou obarvena jako pole šachovnice, vyplnit čísly 2 a -1 tak, že současně platí:*

(i) *součet všech čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky je roven 0,*
(ii) *součet čísel na všech černých polích tabulky se rovná součtu čísel na všech jejích bílých polích.* (Martin Melicher)

Řešení. V první části řešení dokážeme, že každé vyhovující číslo n musí být dělitelné šesti. Třikrát přitom využijeme zřejmý poznatek z řešení 2. úlohy domácího kola: *Je-li součet několika čísel roven nule a přitom každé z nich je rovno 2 či -1, je celkový počet těchto čísel dělitelný třemi.*

Předpokládejme nyní, že tabulka $n \times n$ je vyplněna požadovaným způsobem. Díky úvodnímu poznatku je podle podmínky (i) číslo n (rovné počtu čísel v jednom řádku tabulky) dělitelné třemi. Že je číslo n dělitelné rovněž dvěma, dokážeme úvahou o součtech S_b a S_c čísel na všech bílých, resp. všech černých polích tabulky.

Součet $S_b + S_c$ všech čísel z tabulky dostaneme, když sečteme všech n součtů čísel v jednotlivých řádcích. Ty jsou podle podmínky (i) všechny rovny nule, a proto platí $S_b + S_c = 0$. Podle podmínky (ii) však zároveň platí $S_b = S_c$, což dohromady dává, že obě čísla S_b a S_c jsou rovna nule. To podle úvodního poznatku znamená, že číslo 3 je dělitelem jak počtu všech bílých polí, tak počtu všech černých polí. Tyto dva počty jsou však buď stejné (je-li n sudé), nebo se liší o 1 (je-li n liché). Protože se však dva násobky čísla 3 nemohou lišit o 1, docházíme k závěru, že počty bílých a černých polí jsou stejné, takže číslo n je skutečně sudé, jak jsme slíbili ukázat. První část řešení je hotova: číslo n je dělitelné dvěma i třemi, a tedy i šesti.

Ve druhé části řešení ukážeme, že pro každé číslo n, které je dělitelné šesti, lze tabulku $n \times n$ vyplnit požadovaným způsobem.

Pro číslo $n = 6k$, kde k je libovolné přirozené číslo, rozdělme tabulku $6k \times 6k$ disjunktním způsobem na k^2 menších tabulek 6×6. Jistě stačí ukázat, že každou z těchto tabulek 6×6 lze vyplnit čísly 2 a -1 požadovaným způsobem, ve výsledku totiž vždy dostaneme vyhovující vyplnění celé tabulky $6k \times 6k$. Příklad jednoho z možných vyplnění tabulky 6×6 vidíte na obrázku (nezáleží zřejmě na tom, která pole jsou obarvena černě, a která bíle).

2	−1	−1	2	−1	−1
−1	2	−1	−1	2	−1
−1	−1	2	−1	−1	2
2	−1	−1	2	−1	−1
−1	2	−1	−1	2	−1
−1	−1	2	−1	−1	2

Poznámka. V první části našeho řešení jsme využili pouze tu část podmínky (i), která se týká nulovosti součtu všech čísel v každém řádku.

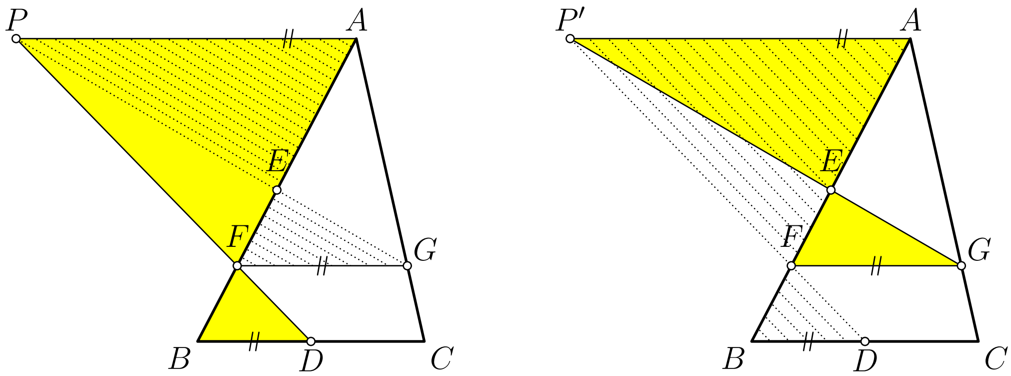
Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho: 1 bod za konstatování, že číslo n je dělitelné třemi (lze se přitom odvolat na výsledek z domácího kola); 1 bod za zdůvodnění, proč jsou součty čísel na všech černých i na všech bílých polích oba rovny nule; 2 body za důkaz, že n je sudé číslo; 2 body za konstrukci příkladu vyplnění pro každé $n = 6k$ (z toho 1 bod za příklad pro $n = 6$).

3. *Je dán trojúhelník ABC, v němž D, E jsou po řadě středy jeho stran BC, AB. Nechť F je střed úsečky BE a G vnitřní bod strany AC, pro nějž platí $|AG| = 3\,|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek DF a GE leží na té rovnoběžce s přímkou BC, která prochází bodem A.* (Patrik Bak)

Řešení. Věnujme se nejprve dvojici úseček BC a FG. Ze zadání bodů F a G plyne $|AB| : |AF| = |AC| : |AG| = 4 : 3$, takže trojúhelníky ABC a AFG jsou podle věty *sus* podobné v poměru $4 : 3$. Odtud plyne, že také $|BC| : |FG| = 4 : 3$ a že $BC \parallel FG$ (díky shodným souhlasným úhlům, které v dalších podobných situacích už zmiňovat nebudeme). Z praktických důvodů dále zvolíme jednotku délky tak, aby platilo $|BC| = 4$ a $|FG| = 3$.

Označme nyní P průsečík přímky DF a rovnoběžky ze zadání úlohy. Z obrázku je patrné, že trojúhelníky BDF a APF jsou podle věty *uu* podobné. Jejich poměr podobnosti je $1 : 3$, neboť podle zadání platí $|AF| = 3\,|BF|$. Z podobnosti trojúhelníků BDF a APF s ohledem na $|BD| = 2$ tudíž plyne $|AP| = 3\,|BD| = 3 \cdot 2 = 6$.

Označme dále P' průsečík přímky GE a rovnoběžky ze zadání úlohy. Podle obrázku vidíme, že také trojúhelníky FGE a $AP'E$ jsou podle věty *uu* podobné; jejich poměr podobnosti je přitom $|FE| : |AE| = 1 : 2$, tudíž $|AP'| = 2 \cdot |FG| = 2 \cdot 3 = 6$.

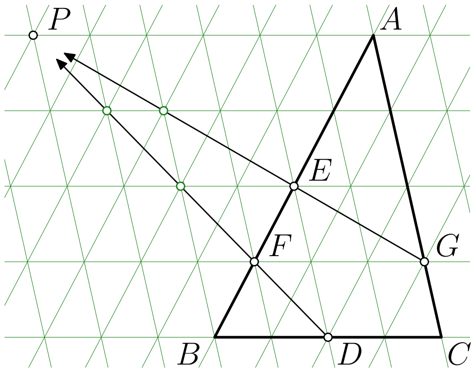


Zjistili jsme, že pro body P a P', které leží na uvažované rovnoběžce v téže polorovině vyťaté přímkou AB, platí $|AP| = |AP'|$, a proto nutně $P = P'$. Na dané rovnoběžce tudíž leží i průsečík přímek DF a GE, jak jsme měli dokázat.

Poznámky.

1. Namísto úvahy o druhém průsečíku P' je možné dokázat, že průsečík P leží na polopřímce opačné k polopřímce EG. K tomu stačí ověřit rovnost $|\sphericalangle FEG| = |\sphericalangle AEP|$. Ta ovšem plyne z vyšrafovaných trojúhelníků FEG a AEP, které jsou totiž podobné podle věty *sus*, neboť se shodují v úhlech při vrcholech F, A a oba poměry $|FE| : |AE|$, $|FG| : |AP|$ jsou rovny poměru $1 : 2$.

   Postupovat při řešení lze rovněž tak, že uvážíme pouze průsečík P', z podobných trojúhelníků FEG, AEP' odvodíme rovnost $|AP'| = 6$ a dokážeme rovnost $|\sphericalangle BFD| = |\sphericalangle AFP'|$ z vyšrafovaných trojúhelníků BFD a AFP', které jsou totiž podle věty *sus* podobné, neboť se shodují v úhlech při vrcholech B, A a oba poměry $|BF| : |AF|$, $|BD| : |AP'|$ jsou rovny poměru $1 : 3$.
2. Polohu průsečíku přímek DF a GE nám prozradí, když si předem načrtneme rovinnou trojúhelníkovou mřížku, jejíž uzly dělí každou stranu trojúhelníku ABC na čtyři shodné úseky.



Obrázek sice přímo napovídá, že přímky DF a GE procházejí obě tím uzlem, který je „šestý nalevo“ od uzlu A, pouhý náčrtek však nelze považovat za úplné řešení úlohy. Je třeba dokázat to, co na obrázku vidíme. Přesněji řečeno, je třeba zdůvodnit, že uvažované spojnice dělících bodů na stranách trojúhelníku ABC ho rozdělují na 16 menších, navzájem shodných trojúhelníků,* které už pak lze doplnit do výsledné mřížky, jež bude „zjemněním“ mřížky tvořené kopiemi trojúhelníku ABC.

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho 2 body za zavedení aspoň jednoho z průsečíků P a P'. Zbylé 4 body udělte podle úplnosti úvah o dvojicích podobných trojúhelníků, které jsou při zvoleném postupu potřebné, z toho 1 bod za důkaz obou relací $|BC| : |FG| = 4 : 3$ a $BC \parallel FG$. Tento bod lze udělit i v případě, kdy žádný z bodů P, P' zaveden není.

Za náčrtek trojúhelníkové mřížky s vykreslenými polopřímkami DF a GE (jako je uveden v poznámce 2) udělte 4 body, k tomu lze přičíst 1–2 body podle míry úplnosti, s jakou je existence takové mřížky zdůvodněna.

* Prvním krokem takového zdůvodnění může být úvaha o dvojici úseček BC a FG z úvodního odstavce řešení.

4. *Nechť a, b jsou libovolná kladná reálná čísla, pro něž platí $a^2 + b^2 = 1$. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu*

$$\frac{a^2(a+b^3)}{b-b^3} + \frac{b^2(b+a^3)}{a-a^3}$$

a určete, pro které uvažované dvojice a, b je tato hodnota dosažena. (Tomáš Bárta)

Řešení. Užitím podmínky $a^2 + b^2 = 1$ upravíme nejprve první zlomek ze zadaného výrazu:

$$\frac{a^2(a+b^3)}{b-b^3} = \frac{a^2(a+b^3)}{b(1-b^2)} = \frac{a^2(a+b^3)}{b\cdot a^2} = \frac{a+b^3}{b} = \frac{a}{b} + b^2.$$

Podobně pro druhý zlomek platí

$$\frac{b^2(b+a^3)}{a-a^3} = \frac{b}{a} + a^2.$$

Sečtením vyjádření obou zlomků tak pro zadaný výraz V dostaneme:

$$V = \left(\frac{a}{b} + b^2\right) + \left(\frac{b}{a} + a^2\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + (a^2+b^2) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1,$$

kde jsme opět využili podmínku $a^2 + b^2 = 1$.

Všimněme si, že pro součet zlomků v posledních kulatých závorkách platí*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2 + 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} + 2 \geqq 2, \quad \text{neboť} \quad \frac{(a-b)^2}{ab} \geqq 0.$$

Z odvozeného vyjádření výrazu V tudíž plyne dolní odhad $V \geqq 2 + 1 = 3$. Jelikož navíc v užité nerovnosti $a/b + b/a \geqq 2$ nastane rovnost, právě když platí $a = b$, rovnost $V = 3$ nastane, právě když kladná čísla a, b splňují obě podmínky $a^2 + b^2 = 1$ a $a = b$, tj. právě když $a = b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Číslo 3 je tedy hledaná nejmenší hodnota daného výrazu V a je dosažena pro jedinou dvojici uvažovaných čísel a, b (určených v závěru předchozí věty).

Za úplné řešení úlohy udělte 6 bodů, z toho: 2 body za potřebnou úpravu alespoň jednoho ze dvou zadaných zlomků; 1 bod za úpravu jejich součtu do tvaru vhodného pro minimalizaci součtu $a/b + b/a$ či maximalizaci součinu ab; 2 body za zdůvodnění dolního odhadu číslem 3 (lze se přitom odvolat na AG-nerovnost jako v poznámce pod čarou); 1 bod za určení (nikoli jen uhodnutí), kdy je nejmenší hodnota dosažena.

Při neúplném řešení za uhodnutí hledaného minima 3 udělte 1 bod jen v případě, kdy je pro tuto hodnotu uvedena odpovídající dvojice $a = b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tento bod lze přičíst k prvním 2 nebo 3 bodům uděleným podle pokynů z předchozího odstavce. Bez úplného důkazu nerovnosti $V \geqq 3$ i při jiných postupech lze získat nejvýše 4 body.

* K důkazu tohoto výsledku lze rovněž využít AG-nerovnost $\frac{1}{2}(u+v) \geqq \sqrt{uv}$ pro hodnoty $u = a/b$ a $v = b/a$. Také je možno díky podmínce $a^2 + b^2 = 1$ využít rovnost $a/b + b/a = 1/(ab)$ a pak maximalizovat součin ab, například užitím uvedené AG-nerovnosti pro $u = a^2$ a $v = b^2$.