70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

Ústřední kolo kategorie A

22. března 2021 od 8.30 do 13.00 hodin

1. Zlomek s 1010 políčky v čitateli a 1011 políčky ve jmenovateli slouží jako hrací plán pro hru dvou hráčů.

$$\frac{\square + \square + \ldots + \square}{\square + \square + \ldots + \square + \square}$$

Hráči se střídají v tazích. V každém tahu hráč vybere jedno z čísel 1, 2, …, 2021 a vloží ho do libovolného prázdného políčka. Každé číslo přitom může být použito jen jednou. Začínající hráč vyhrává, jestliže se hodnota zlomku po zaplnění všech políček liší od čísla 1 o méně než 10^{-6}. V opačném případě vyhrává druhý hráč. Rozhodněte, který z hráčů má vítěznou strategii.

2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.

3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c splňují množinovou rovnost

$$\{a+b, b+c, c+a\} = \{ab, bc, ca\}.$$

Dokažte, že platí rovněž rovnost

$$\{a, b, c\} = \left\{a^2-2, b^2-2, c^2-2\right\}.$$

Za každou úlohu může soutěžící získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.
Řeší-li žák ústřední kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke své nepřetržité kontrole, k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 13.20.

70. ročník Matematické olympiády (2020/2021)

Ústřední kolo kategorie A

23. března 2021 od 8.30 do 13.00 hodin

4. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnost

$$n + d(n) + d(d(n)) + \cdots = 2021,$$

kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$).

5. Řetězec znaků nazveme *úhledným*, má-li sudou délku a jeho první polovina je shodná s druhou polovinou (např. *abab*). Řetězec nazveme *pěkným*, pokud ho lze rozdělit na několik úhledných řetězců (jako *abcabcdedeff* na *abcabc*, *dede* a *ff*). *Redukcí* řetězce nazveme operaci, při které z řetězce smažeme dva stejné sousední znaky (např. řetězec *abbac* lze zredukovat na *aac* a ten dále na *c*). Dokažte, že libovolný řetězec obsahující každý svůj znak v sudém počtu lze získat sérií redukcí z vhodného pěkného řetězce.

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro každý jeho vnitřní bod X označme X_a, X_b, X_c jeho obrazy v osových souměrnostech po řadě podle přímek BC, CA, AB. Dokažte, že všechny trojúhelníky $X_aX_bX_c$ mají společný bod.

Za každou úlohu může soutěžící získat 7 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby. Knihy, kalkulátory, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.
Řeší-li žák ústřední kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke své nepřetržité kontrole, k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 13.20.

1. *Zlomek s* 1010 *políčky v čitateli a* 1011 *políčky ve jmenovateli slouží jako hrací plán pro hru dvou hráčů.*

$$\frac{\square + \square + \ldots + \square}{\square + \square + \ldots + \square + \square}$$

Hráči se střídají v tazích. V každém tahu hráč vybere jedno z čísel 1, 2, ..., 2021 *a vloží ho do libovolného prázdného políčka. Každé číslo přitom může být použito jen jednou. Začínající hráč vyhrává, jestliže se hodnota zlomku po zaplnění všech políček liší od čísla* 1 *o méně než* 10^{-6}. *V opačném případě vyhrává druhý hráč. Rozhodněte, který z hráčů má vítěznou strategii.* (Pavel Šalom)

Řešení. Ukážeme, že vítěznou strategii má začínající hráč. Nazvěme jej A a jeho protivníka označme B. Popíšeme předně postup hráče A, kterým zajistí, že jmenovatel výsledného zlomku bude právě o 1 větší než jeho čitatel.

Hráč A při svém prvním tahu vloží číslo 1 do jmenovatele. Kdykoli hráč B při svém tahu vybere a vloží do zlomku číslo x, hráč A při následném tahu vybere číslo $2023 - x$ a vloží je do téže části zlomku, kam vložil hráč B číslo x (tj. obě po sobě vložená čísla x a $2023 - x$ budou buď v čitateli, nebo ve jmenovateli).

Vysvětlíme, proč popsanou strategii může hráč A vždy uskutečnit. Předně si uvědomíme, že po vložení čísla 1 do jmenovatele bude jak v čitateli, tak ve jmenovateli *sudý počet volných políček* (konkrétně 1010 v obou částech zlomku). Tato vlastnost zůstane zřejmě zachována po každém tahu hráče A. Proto se nemůže stát, že by hráč B při některém svém tahu obsadil poslední volné políčko čitatele nebo jmenovatele.

Nemůže se stát ani to, že by číslo, které má hráč A po některém tahu hráče B vkládat, bylo už dříve vybrané, neboť po úvodním vložení čísla 1 lze zbylá čísla od 2 do 2021 rozdělit na dvojice čísel se stejným součtem 2023:

$$\{2, 2021\}, \{3, 2020\}, \{4, 2019\}, \ldots, \{1011, 1012\}.$$

Znamená to, že při každém svém tahu hráč B nějakou z těchto dvojic „načne“ a hráč A ji následně „dokončí“. Tím je slíbené vysvětlení hotovo.

Popsaná strategie hráče A zaručí, že po zaplnění všech políček bude hodnota čitatele rovna $505 \cdot 2023$, zatímco hodnota jmenovatele bude $505 \cdot 2023 + 1$. Protože pro takový zlomek platí

$$0 < 1 - \frac{505 \cdot 2023}{505 \cdot 2023 + 1} = \frac{1}{505 \cdot 2023 + 1} < \frac{1}{500 \cdot 2000} = 10^{-6},$$

hráč A bude vítězem.

2. *Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.* (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

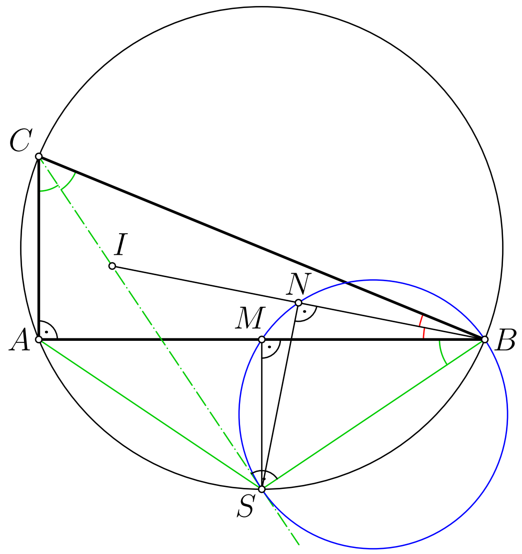
Řešení. Označme $S \neq C$ druhý průsečík přímky CI s kružnicí ABC.* Dokážeme, že přímka CI se dotýká kružnice BMN právě v bodě S.

Je známo, že bod S je střed kružnice AIB. Tento výsledek platí pro obecný trojúhelník ABC a uvedeme nyní jeho krátký důkaz. Protože CS je osa úhlu ACB, přísluší v něm ležícím obloukům SA a SB kružnice ABC shodné obvodové úhly, odkud plyne $|SA| = |SB|$. Druhou potřebnou rovnost $|SB| = |SI|$ dokážeme přes úhly trojúhelníku BIS při vrcholech B a I

$$|\sphericalangle BIS| = |\sphericalangle BCI| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle ACS| + |\sphericalangle ABI| = |\sphericalangle ABS| + |\sphericalangle ABI| = |\sphericalangle IBS|.$$

Dohromady máme $|SA| = |SB| = |SI|$ a důkaz je hotov.

Protože S je střed kružnice AIB, pro středy M, N jejích tětiv AB, BI platí $SM \perp MB$ a $SN \perp NB$, takže body S, M, N, B leží na (Thaletově) kružnici nad průměrem BS. Střed kružnice BMN je tedy středem úsečky BS, a proto k dokončení celého řešení stačí zdůvodnit, že $|\sphericalangle CSB| = 90°$. Obvodový úhel CSB v kružnici ABC je však shodný s obvodovým úhlem CAB, a ten je podle zadání úlohy skutečně pravý.



Poznámka. Roli bodu S v řešení úlohy naznačuje fakt, že uvažovaná kružnice BMN je ve stejnolehlosti $\mathcal{H}\left(B, \frac{1}{2}\right)$ obrazem kružnice AIB, jejíž střed je právě bod S. Odtud hned plyne klíčový poznatek, že totiž úsečka BS je průměrem kružnice BMN, které se má přímka CI dotýkat.

* Pro stručnost budeme „kružnicí PQR“ rozumět kružnici opsanou trojúhelníku PQR.

3. *Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c splňují množinovou rovnost*

$$\{a+b, b+c, c+a\} = \{ab, bc, ca\}.$$

Dokažte, že platí rovněž rovnost

$$\{a, b, c\} = \{a^2-2, b^2-2, c^2-2\}.$$

(Josef Tkadlec)

Řešení. Čísla a, b, c jsou navzájem různá a nenulová, takže jsou navzájem různá jak čísla $a+b$, $b+c$, $c+a$, tak i čísla ab, bc, ca. Proto jsou množiny z první věty zadání zapsány korektně, tj. jsou skutečně tříprvkové. Toto úvodní konstatování v dalších řešeních opakovat nebudeme.

Protože zadání úlohy je v číslech a, b, c symetrické, můžeme rovnost posouzených tříprvkových množin vyjádřit třemi principiálně odlišnými soustavami rovnic*

$$\begin{aligned} a+b&=ab, \\ b+c&=bc, \\ c+a&=ca, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a+b&=ab, \\ b+c&=ca, \\ c+a&=bc, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a+b&=bc, \\ b+c&=ca, \\ c+a&=ab. \end{aligned}$$

V případě první soustavy dostáváme odečtením její druhé rovnice od první vztah $a-c=b(a-c)$. Odtud s ohledem na předpoklad $a \neq c$ plyne $b=1$. To však odporuje první rovnici zkoumané soustavy.

Podobně v případě druhé soustavy dostáváme odečtením třetí rovnice od druhé vztah $b-a=c(a-b)$, takže díky $a \neq b$ máme $c=-1$. Dosazením do soustavy dostaneme rovnice $a+b=ab$ a $a+b=1$, odkud $ab=1$. Čísla a, b jsou proto kořeny rovnice $x^2-x+1=0$. Ta však reálné kořeny nemá.

Zůstává nám tak rozebrat případ třetí soustavy. Označme její rovnice shora dolů (1), (2), (3). V jejich důsledku platí

$$ab^2 \overset{(3)}{=} b(c+a) = bc+ab \overset{(1),(3)}{=} (a+b)+(c+a) = 2a+(b+c) \overset{(2)}{=} 2a+ca = a(2+c).$$

Porovnáním obou krajních výrazů dostáváme $ab^2=a(2+c)$, odkud s ohledem na $a \neq 0$ máme $b^2=2+c$ neboli $c=b^2-2$. Protože zkoumaná třetí soustava je cyklická, platí rovněž $a=c^2-2$ a $b=a^2-2$. Množinová rovnost ze závěru zadání úlohy je tak dokázána.

Jiné řešení. Ukážeme, že třetí soustavu z původního řešení

$$a+b=bc \tag{1}$$
$$b+c=ca \tag{2}$$
$$c+a=ab \tag{3}$$

lze posoudit tak, že ji začneme řešit běžnou eliminační metodou. Z (3) vyjádříme $c=ab-a$ a dosadíme takové c do (2). Dostaneme po úpravě $a^2-a=b(a^2-a-1)$. Všimneme

* Rozlišíme přitom, kolik rovnic typu $x+y=xy$ splňují dvojice $\{x,y\}$ vybrané z $\{a,b,c\}$. Buď to jsou všechny tři dvojice či právě jedna z nich, nebo to není žádná.

si, že podle (2) platí $a \neq 1$, což spolu s $a \neq 0$ dává $a^2 - a \neq 0$. Proto ze vzorce $a^2 - a = b(a^2 - a - 1)$ plyne nerovnost $a^2 - a - 1 \neq 0$ a vyjádření $b = (a^2 - a)/(a^2 - a - 1)$. Po jeho dosazení do (3) dostaneme $c = a/(a^2 - a - 1)$. Rovnici (1) tak můžeme přepsat ve tvaru

$$a + \frac{a^2 - a}{a^2 - a - 1} = \frac{a^2 - a}{a^2 - a - 1} \cdot \frac{a}{a^2 - a - 1},$$

odkud po úpravách dostaneme rovnici

$$0 = a^5 - a^4 - 4a^3 + 3a^2 + 2a = a(a-2)(a^3 + a^2 - 2a - 1).$$

Protože $a \neq 0$ a rovnost $a = 2$ by podle (2) znamenala $b = c$, docházíme k závěru, že číslo a je nutně kořenem mnohočlenu

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Protože zkoumaná soustava je cyklická, kořeny polynomu $Q(x)$ jsou také čísla b a c, takže platí rozklad $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.* K dořešení úlohy proto stačí dokázat, že čísla $a^2 - 2$, $b^2 - 2$, $c^2 - 2$ jsou rovněž navzájem různé kořeny polynomu $Q(x)$.

Nejprve zdůvodníme vzájemnou různost: s ohledem na symetrii stačí vyloučit např. rovnost $a^2 - 2 = b^2 - 2$. Podle ní by platilo $a = b$ nebo $a = -b$. První rovnost odporuje zadání přímo, z druhé rovnosti podle (1) plyne $bc = 0$, což je rovněž ve sporu se zadáním.

Dokázat, že čísla $a^2 - 2$, $b^2 - 2$, $c^2 - 2$ jsou kořeny mnohočlenu $Q(x)$, znamená totéž co ověřit, že mnohočlen $Q\big(x^2 - 2\big)$ je dělitelný třemi různými kořenovými činiteli $x - a$, $x - b$, $x - c$, a tedy i jejich součinem, tj. polynomem $Q(x)$. Máme tedy jasno, jak řešení dokončit: nejprve vypočteme

$$Q\big(x^2 - 2\big) = (x^2 - 2)^3 + (x^2 - 2)^2 - 2(x^2 - 2) - 1 = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$$

a poté se užitím známého algoritmu přesvědčíme, že dělení $Q\big(x^2 - 2\big) : Q(x)$ vyjde beze zbytku. Zapíšeme zde pouze výsledek tohoto dělení v podobě rozkladu

$$Q\big(x^2 - 2\big) = Q(x) \cdot (x^3 - x^2 - 2x + 1).$$

POZNÁMKY.

1. Kořeny polynomu $Q(x)$ jsou čísla $2\cos\frac{2}{7}\pi \doteq 1{,}24698$, $2\cos\frac{4}{7}\pi \doteq -0{,}44504$ a $2\cos\frac{6}{7}\pi \doteq -1{,}80194$. Takové jsou tedy (až na pořadí) hodnoty libovolné trojice čísel a, b, c vyhovujících zadání úlohy.
2. Naznačme odlišný důkaz tvrzení, že trojice $\{a, b, c\}$ kořenů odvozeného polynomu $Q(x)$ je shodná s trojicí $\{a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2\}$ (nebude přitom nutné předem zdůvodňovat, že jde také o tři různá čísla). Zmíněný fakt vyjádříme pomocí Viétových vzorců rovnostmi

$$\begin{aligned} a + b + c &= -1 = (a^2 - 2) + (b^2 - 2) + (c^2 - 2), \\ ab + bc + ca &= -2 = (a^2 - 2)(b^2 - 2) + (b^2 - 2)(c^2 - 2) + (c^2 - 2)(a^2 - 2), \\ abc &= 1 = (a^2 - 2)(b^2 - 2)(c^2 - 2). \end{aligned}$$

* Je možné ověřit, že kořeny $Q(x)$ jsou tři navzájem různá reálná čísla, ale není to nezbytné. Podle zadání úlohy totiž vyhovující čísla a, b, c existují.

Je tudíž třeba dokázat, že ze tří levých rovností plynou všechny tři pravé rovnosti. Nebudeme se touto algebraickou prověrkou zde zabývat.

Jiné řešení. Nezávisle na prvních dvou řešeních popíšeme ještě jedno odvození toho kubického polynomu $Q(x) = x^3 - sx^2 + rx - p$, jehož kořeny jsou zadaná (navzájem různá) čísla a, b, c. (Zbytek druhého řešení poté opakovat nebudeme.) K hledaným hodnotám $s = -1$, $r = -2$ a $p = 1$ dojdeme tak, že pro tato neznámá čísla určená Viétovými vzorci

$$s = a + b + c, \quad r = ab + bc + ca, \quad p = abc$$

nejdříve trojím užitím rovnosti $\{a + b, b + c, c + a\} = \{ab, bc, ca\}$ získáme soustavu tří rovnic, kterou pak vyřešíme.

Z rovnosti součtu prvků v obou tříprvkových množinách

$$(a + b) + (b + c) + (c + a) = ab + bc + ca$$

máme první rovnici $2s = r$. Sečtení součinů dvojic čísel v každé z obou množin vede k druhému důsledku

$$(a + b)(b + c) + (b + c)(c + a) + (c + a)(a + b) = ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab,$$

který lze upravit do tvaru $(a + b + c)^2 + (ab + bc + ca) = abc(a + b + c)$, tj. $s^2 + r = p \cdot s$. Konečně v rovnosti součinů trojic čísel

$$(a + b)(b + c)(c + a) = ab \cdot bc \cdot ca$$

je levá strana rovna $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = s \cdot r - p$ a pravá je p^2, takže platí $s \cdot r = p^2 + p$. Výslednou soustavu tří rovnic

$$2s = r, \quad s^2 + r = p \cdot s, \quad s \cdot r = p^2 + p$$

eliminací $r = 2s$ zredukujeme na soustavu

$$s^2 + 2s = p \cdot s, \tag{4}$$

$$2s^2 = p^2 + p. \tag{5}$$

V případě $s = 0$ z (5) plyne $p^2 + p = 0$, takže $p \in \{0, -1\}$. Této situaci odpovídají polynomy $Q_1(x) = x^3$ a $Q_2(x) = x^3 + 1$, žádný z nich však zřejmě nemá tři různé reálné kořeny. Nutně tedy platí $s \neq 0$.

Po vydělení (4) číslem $s \neq 0$ dostaneme $s + 2 = p$. Dosazením takového p do (5) obdržíme kvadratickou rovnici $0 = s^2 - 5s - 6 = (s - 6)(s + 1)$. V úvahu tak připadají jediná dvě řešení $(s, r, p) \in \{(6, 12, 8), (-1, -2, 1)\}$. Prvnímu z nich odpovídá polynom $Q_3(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$ s pouze jedním reálným kořenem, druhému řešení polynom $Q_4(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. Hledaný polynom $Q(x)$ je tedy nutně roven polynomu $Q_4(x)$.

Poznámka. Výpočet čísel s, r, p můžeme zjednodušit, když využijeme úvodní poznatek z prvního řešení, podle kterého čísla a, b, c po případném přeznačení (daném změnou jejich pořadí) splňují soustavu rovností

$$a + b = bc, \quad b + c = ca, \quad c + a = ab. \tag{6}$$

Porovnáním rozdílů jejich levých a odpovídajících pravých stran dostaneme rovnosti

$$a - c = c(b - a), \quad b - a = a(c - b), \quad c - b = b(a - c).$$

Porovnáme-li nyní součin tří levých stran se součinem tří pravých stran, pak po vydělení nenulovým číslem $(a-b)(b-c)(c-a)$ již dostaneme první ze tří neznámých hodnot, totiž $p = abc = 1$.

Přepíšeme-li nově rovnosti (6) do tvaru

$$a = b(c - 1), \quad b = c(a - 1), \quad c = a(b - 1),$$

pak obdobnou procedurou vynásobení s ohledem na $abc \neq 0$ dostaneme rovnost $1 = (a - 1)(b - 1)(c - 1)$. Z ní po roznásobení a dosazení hodnoty $abc = 1$ vyjde pro neznámé $s = a + b + c$ a $r = ab + bc + ca$ rovnice $r = s - 1$. Ta spolu s rovnicí $2s = r$, kterou získáme sečtením rovností (6), už vede k určení hodnot $s = -1$ a $r = -2$.

4. *Najděte všechna přirozená čísla n, pro která platí rovnost*

$$n + d(n) + d(d(n)) + \cdots = 2021,$$

kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$). (Tomáš Bárta)

Řešení. Podobně jako v domácím kole využijeme poznatek, že pro superdělitele $d(m)$ celého čísla $m > 1$ platí vzorec $d(m) = m/p$, kde p je nejmenší prvočinitel čísla m.

Rozložme tedy hledané n na prvočinitele: $n = p_1 p_2 \dots p_k$, kde $p_1 \geqq p_2 \geqq \dots \geqq p_k$ jsou prvočísla. Pak díky úvodnímu poznatku můžeme rovnost ze zadání přepsat ve tvaru

$$p_1 \dots p_k + p_1 \dots p_{k-1} + p_1 \dots p_{k-2} + \cdots + p_1 p_2 + p_1 + 1 = 2021.$$

Po odečtení čísla 1 postupným vytýkáním na levé straně dostaneme

$$p_1(1 + p_2(1 + p_3(1 + \cdots + p_{k-1}(1 + p_k) \dots))) = 2020. \tag{1}$$

Vidíme, že $p_1 \mid 2020 = 101 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$. Protože p_1 je prvočíslo, máme 3 možnosti:

a) $p_1 = 101$. Z (1) plyne $1 + p_2(\dots) = 20$, takže $p_2 \mid 19$, a tedy $p_2 = 19$ (a $k = 2$), což díky $101 > 19$ vede skutečně k řešení $n = 101 \cdot 19 = 1919$.

b) $p_1 = 5$. Z (1) plyne $1 + p_2(\dots) = 404$, takže $p_2 \mid 403$. Podle $5 = p_1 \geqq p_2$ však prvočíslo p_2 může být jen 2, 3 nebo 5, není to tedy dělitel čísla $403 = 13 \cdot 31$.

c) $p_1 = 2$. Z (1) plyne $1 + p_2(\dots) = 1010$, takže $p_2 \mid 1009$. To však odporuje tomu, že podle $2 = p_1 \geqq p_2$ je $p_2 = 2$.

Závěr. Jediné vyhovující číslo je $n = 1919$.

5. *Řetězec znaků nazveme* úhledným*, má-li sudou délku a jeho první polovina je shodná s druhou polovinou (např. abab). Řetězec nazveme* pěkným*, pokud ho lze rozdělit na několik úhledných řetězců (jako abcabcdedeff na abcabc, dede a ff).* Redukcí *řetězce nazveme operaci, při které z řetězce smažeme dva stejné sousední znaky (např. řetězec abbac lze zredukovat na aac a ten dále na c). Dokažte, že libovolný řetězec obsahující každý svůj znak v sudém počtu lze získat sérií redukcí z vhodného pěkného řetězce.*

(Martin Melicher)

ŘEŠENÍ. Ve všech řešeních budeme značit $\overline{T}$ řetězec, který vznikne z řetězce T „otočením“ jeho znaků, tj. jejich zapsáním v opačném pořadí (od posledního znaku po první). Kromě toho budeme používat uvnitř řetězců kulaté závorky, které nebudeme považovat za znaky, ale jen za vizuální oddělovače. Budeme rovněž pracovat i s prázdným řetězcem, který je redukcí každého řetězce aa o dvou stejných znacích.

Pro libovolný řetězec X zřejmě platí, že řetězec $\overline{X}X$ lze sérií redukcí převést na prázdný řetězec, a to postupným odebíráním dvojic stejných znaků „ze středu“.

Nechť X a Y jsou libovolné (ne nutně neprázdné) řetězce a nechť P je nějaký pěkný řetězec, který lze sérií redukcí převést na XY. Potom řetězec $\overline{X}\,\overline{X}P$ je rovněž pěkný a lze ho převést na řetězec $\overline{X}(\overline{X}X)Y$, který lze podle předchozího odstavce dále převést na $\overline{X}Y$.

Dokázané tvrzení o dvojici řetězců $T = XY$ a $T_1 = \overline{X}Y$ můžeme vyslovit takto: Lze-li daný řetězec T získat sérií redukcí z pěkného řetězce, platí totéž i o každém řetězci T_1, který získáme z řetězce T otočením některého jeho „začátku“ X (může být i $X = T$). Uvědomme si, že posloupností takových otočení lze z daného řetězce T vytvořit libovolnou permutaci jeho znaků. Skutečně, libovolný znak z T lze nejprve jedním otočením přesunout na počátek řetězce (pokud tam už původně nestojí) a poté dalším otočením (celého řetězce) na jeho konec. Opakováním této procedury dokážeme (postupně od konce) vytvořit jakoukoli permutaci znaků řetězce T.

Uvažujme nyní podle zadání úlohy libovolný řetězec T, který obsahuje každý svůj znak v sudém počtu. V takovém řetězci T lze zřejmě přeuspořádat znaky tak, aby vyšel nějaký úhledný řetězec T'. Ten je už sám o sobě pěkný, takže podle předchozího odstavce lze sériemi redukcí pěkných řetězců získat každý takový řetězec, který vznikne z řetězce T' permutací jeho znaků. Protože jedna taková permutace dává výchozí řetězec T, je řešení úlohy hotovo.

POZNÁMKA. K výsledku úlohy dodejme, že řetězce obsahující každý svůj znak v sudém počtu jsou právě ty, které se dají získat sérií redukcí z nějakého pěkného řetězce. Jednu implikaci jsme dokázali vyřešením zadané úlohy, druhá plyne okamžitě z toho, že každá redukce daného řetězce zachovává paritu všech počtů jeho jednotlivých znaků.

JINÉ ŘEŠENÍ. O řetězci řekneme, že je *sudý*, obsahuje-li každý znak v sudém počtu. Máme tak dokázat, že každý sudý řetězec lze získat sérií redukcí z nějakého pěkného řetězce. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle délky sudého řetězce.

Nejmenší sudou délku 0 má pouze prázdný řetězec, pro nějž tvrzení platí triviálně.

Ve druhém indukčním kroku uvažme sudý neprázdný řetězec T a označme a jeho první znak. Písmeno a se v T nachází ještě na některé další pozici, což umožňuje zapsat T ve tvaru $T = aXaY$, kde X a Y jsou vhodné (ne nutně neprázdné) řetězce.

Protože řetězec $\overline{X}Y$ je sudý a kratší než T (o dva znaky), podle indukčního předpokladu lze $\overline{X}Y$ získat sérií redukcí z vhodného pěkného řetězce A, což zapíšeme symbolicky takto: $A \rightarrowtail \overline{X}Y$. Pak $A' = (aXaX)A$ je rovněž pěkný řetězec, který dokážeme zredukovat na výchozí řetězec T způsobem, při kterém vhodné série redukcí zapíšeme opět symbolicky:

$$A' = (aXaX)A \rightarrowtail (aXaX)(\overline{X}Y) = aXa(X\overline{X})Y \rightarrowtail aXaY = T.$$

(Série redukcí řetězce $X\overline{X}$ na prázdný je zřejmá, viz první řešení). Tím je důkaz indukcí ukončen.

Jiné řešení. Podívejme se na řešenou situaci „od konce“: Do zadaného řetězce T, který obsahuje každý svůj znak v sudém počtu, se budeme snažit opakovaně vkládat dvojice stejných znaků, dokud nedostaneme pěkný řetězec.* Každá dílčí série vkládání bude vypadat následovně.

V aktuálním řetězci vybereme některý úsek $a_1a_2\dots a_n$ složený z několika sousedních znaků a_i. Do tohoto úseku postupně vložíme dvojice a_1a_1, a_2a_2,…, a_na_n takto:

$$\begin{gathered}(a_1a_2\dots a_n) \to (a_1a_2\dots a_n)a_1a_1 \to (a_1a_2\dots a_n)a_1a_2a_2a_1 \to \\ \to (a_1a_2\dots a_n)a_1a_2a_3a_3a_2a_1 \to \dots \to (a_1a_2\dots a_n)(a_1a_2\dots a_n)(a_na_{n-1}\dots a_1).\end{gathered}$$

Vidíme, že jsme výchozí úsek $C = a_1a_2\dots a_n$ otočili na $\overline{C} = a_na_{n-1}\dots a_1$ s tím, že se nám před $\overline{C}$ zleva objevily dvě nové kopie C v podobě úhledného řetězce CC. Celý postup úpravy zvoleného úseku $C = a_1a_2\dots a_n$ vyjádříme zkráceným zápisem s jednou šipkou: $C \to CC\overline{C}$.

Nyní už jsme připraveni popsat celkový algoritmus úprav výchozího řetězce T. Stejně jako v druhém řešení ho nejprve zapíšeme ve tvaru $T = xAxB$, kde x je první znak T a A, B jsou vhodné (ne nutně neprázdné) řetězce. Užitím navržené úpravy postupně pro úseky $C = xA$ a $C = \overline{A}xx$ dostaneme

$$\begin{aligned}T =&(xA)xB \to (xA)(xA)(\overline{A}x)xB = (xA)(xA)(\overline{A}xx)B \to \\ &\to (xA)(xA)(\overline{A}xx)(\overline{A}xx)(xxA)B = (xAxA)(\overline{A}xx\overline{A}xx)(xx)AB.\end{aligned} \tag{1}$$

Všechny úseky v závorkách posledního řetězce jsou úhledné, přitom koncový úsek $T' = AB$ je o 2 kratší než T (a má všechny své znaky zastoupené v sudém počtu). Není-li T' prázdný řetězec, zopakujeme ve druhém kroku úpravy (1) pro T' namísto T, atd. Je zřejmé, že po konečném počtu kroků obdržíme pěkný řetězec, jak jsme si úvodem tohoto řešení vytyčili.

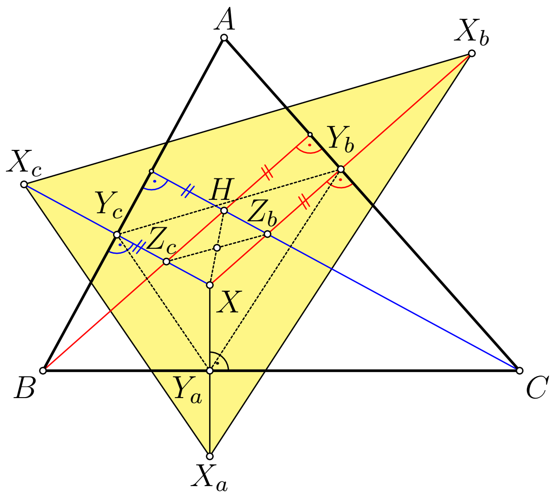
* Dvojici stejných znaků budeme nejen vkládat mezi některé dva sousední znaky aktuálního řetězce, ale také případně připisovat za jeho poslední znak.

6. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro každý jeho vnitřní bod X označme X_a, X_b, X_c jeho obrazy v osových souměrnostech po řadě podle přímek BC, CA, AB. Dokažte, že všechny trojúhelníky $X_aX_bX_c$ mají společný bod.* (Josef Tkadlec)

Řešení. V limitním případě, kdy $X = A$, trojúhelník $X_aX_bX_c$ degeneruje na úsečku, která leží na přímce obsahující výšku trojúhelníku ABC ke straně BC. Podobně to funguje v případech $X = B$ a $X = C$. Dohromady to naznačuje, že hledaným společným bodem všech trojúhelníků $X_aX_bX_c$ bude ortocentrum H trojúhelníku ABC. Dokážeme, že je tomu skutečně tak.

Označme předně Y_a, Y_b, Y_c kolmé průměty bodu X po řadě na strany BC, CA, AB. Bod X podle zadání leží uvnitř ostroúhlého trojúhelníku ABC, takže Y_a, Y_b, Y_c jsou vnitřní body příslušných stran a navíc X je vnitřním bodem trojúhelníku $Y_aY_bY_c$. Poslední fakt zdůvodníme takto: Čtyřúhelníky AY_bXY_c, BY_cXY_a, a CY_aXY_b jsou podle Thaletovy věty tětivové, a tedy i konvexní, takže bod X není bodem žádného z trojúhelníků AY_bY_c, BY_cY_a a CY_aY_b, tudíž leží ve „zbytku“ trojúhelníku ABC, kterým je vnitřek trojúhelníku $Y_aY_bY_c$. Protože body Y_a, Y_b, Y_c jsou po řadě středy úseček XX_a, XX_b, XX_c, ze stejnolehlosti $\mathcal{H}(X, 2)$ plyne, že bod X leží i uvnitř trojúhelníku $X_aX_bX_c$.

V případě, kdy $X = H$, závěr předchozího odstavce už znamená, že bod H leží uvnitř $\triangle X_aX_bX_c$. Je-li X vnitřním bodem jedné z úseček AH, BH nebo CH, například úsečky AH, pak H je vnitřním bodem úsečky XX_a, takže rovněž leží uvnitř $\triangle X_aX_bX_c$, jak jsme měli dokázat. Zbývá tedy rozebrat případ, kdy bod X neleží na žádné z úseček AH, BH ani CH. Tehdy bod X leží uvnitř jednoho z trojúhelníků BHC, CHA nebo AHB. Nechť je to $\triangle BHC$ bez újmy na obecnosti.



Protože $CH \parallel XX_c$, úsečka XX_c protne úsečku BH v některém bodě Z_c. Analogicky díky $BH \parallel XX_b$ úsečka XX_b protne úsečku CH v některém bodě Z_b. Užité rovnoběžnosti navíc znamenají, že vzniklý čtyřúhelník XZ_bHZ_c je rovnoběžník. Odtud plyne, že úsečky Z_bZ_c a XH mají společný střed.

Uvažujme nyní opět stejnolehlost $\mathcal{H}(X, 2)$. Ta zobrazí úsečku Z_bZ_c na jistou úsečku, jejíž střed je podle závěru předchozího odstavce právě bod H. Ukážeme-li tedy, že oba krajní body této úsečky, neboli obrazy bodů Z_b a Z_c, leží v $\triangle XX_bX_c$, bude to znamenat, že v $\triangle XX_bX_c$ leží také bod H. Tím budeme s celým řešením hotovi, neboť trojúhelník

XX_bX_c je částí trojúhelníku $X_aX_bX_c$ (X je totiž, jak víme, jeho vnitřní bod). Potřebná vlastnost obrazů Z_b a Z_c ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(X,2)$ však plyne okamžitě z nerovností

$$|XX_c| = 2|XY_c| > 2|XZ_c| \quad \text{a} \quad |XX_b| = 2|XY_b| > 2|XZ_b|.$$

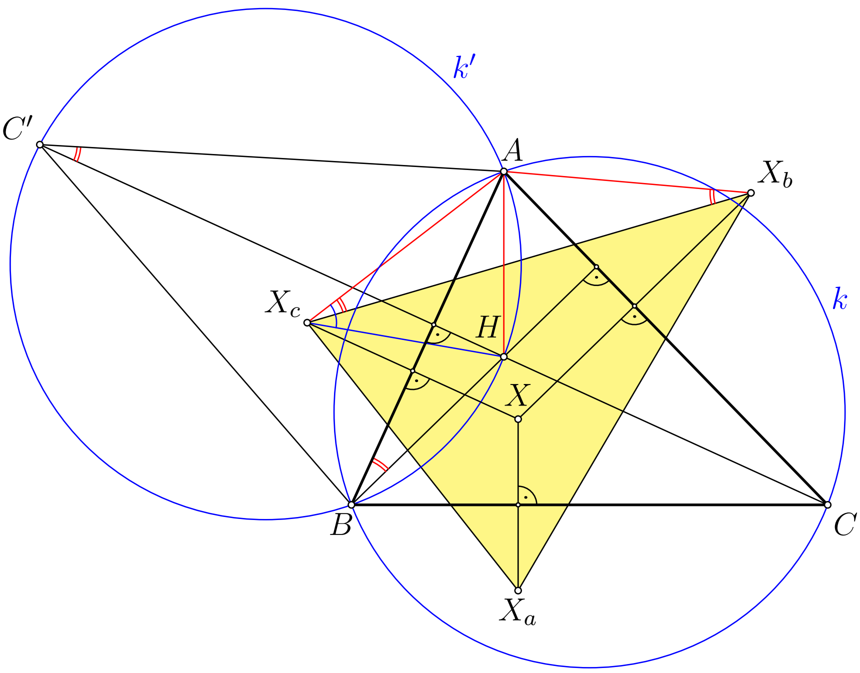
Jiné řešení. Odlišným způsobem ověříme, že ortocentrum H je (vnitřním) bodem trojúhelníku $X_aX_bX_c$. Nejprve vysvětlíme, proč nám k tomu stačí dokázat, že úsečka X_bX_c protíná úsečky AH, AX v jejich vnitřních bodech. To totiž bude díky symetrii zadání znamenat, že podobně protíná úsečka X_cX_a úsečky BH, BX a úsečka X_aX_b úsečky CH, CX, takže oba body H a X budou ležet uvnitř průniku tří polorovin opačných k polorovinám X_bX_cA, X_cX_aB a X_aX_bC. Tímto průnikem ovšem musí být trojúhelník $X_aX_bX_c$, neboť v něm leží bod X, jak víme z prvního řešení (důkaz tohoto tvrzení zde opakovat nebudeme).

K důkazu protětí úseček X_bX_c a AX využijeme rovnosti $|AX| = |AX_b| = |AX_c|$, které plynou z užitých osových souměrností a podle kterých je bod A středem kružnice opsané trojúhelníku XX_bX_c. Protože pro obvodový úhel X_bXX_c v této kružnici platí

$$|\sphericalangle X_bXX_c| = 180° - |\sphericalangle BAC| > 90°,$$

neboť podle zadání $\alpha = |\sphericalangle BAC| < 90°$, protíná tětiva X_bX_c poloměr AX v jeho vnitřním bodě, jak jsme chtěli dokázat.

Pro důkaz potřebného tvrzení o úsečkách X_bX_c a AH si nejprve povšimneme, že konvexní úhel X_cAX_b má díky konstrukci bodů X_b, X_c velikost 2α a úsečka AH leží v tomto úhlu. Dokážeme-li proto nerovnost $|\sphericalangle AX_cX_b| < |\sphericalangle AX_cH|$, bude to již znamenat, že úsečka X_bX_c skutečně protne úsečku AH v jejím vnitřním bodě.



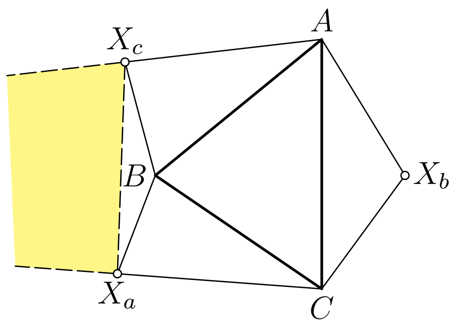
Jak už víme, trojúhelník AX_bX_c je rovnoramenný a má u hlavního vrcholu A úhel velikosti 2α. Proto mají oba zbývající úhly u vrcholů X_b, X_c velikost $90° - \alpha$, jakou má zřejmě i úhel ABH. Proto je potřebná nerovnost $|\sphericalangle AX_cX_b| < |\sphericalangle AX_cH|$ ekvivalentní s nerovností $|\sphericalangle ABH| < |\sphericalangle AX_cH|$, kterou ve zbytku řešení dokážeme následujícím postupem.

Je známo, že bod H leží na kružnici k', která je obrazem kružnice k opsané trojúhelníku ABC v osové souměrnosti podle přímky AB, přesněji na tom jejím oblouku AB, který neobsahuje obraz C' vrcholu C.* Protože bod X leží uvnitř $\triangle ABC$, leží jeho obraz X_c uvnitř $\triangle ABC'$, a tedy i uvnitř kruhové úseče kružnice k' vymezené obloukem $AC'B$. Odtud už dostáváme

$$|\sphericalangle ABH| = |\sphericalangle AC'H| < |\sphericalangle AX_cH|,$$

jak jsme potřebovali ukázat.

Poznámka. Z dokázaného tvrzení o protětí úseček v každé ze dvojic (AH, X_bX_c), (BH, X_bX_c) a (CH, X_cX_a) plyne nejen (v řešení využitý) závěr, že bod H leží uvnitř průniku tří polorovin opačných k X_bX_cA, X_cX_aB a X_aX_bC, ale také závěr, že bod H leží uvnitř tří (konvexních) úhlů X_bAX_c, X_cBX_a a X_aCX_b. Ani oba tyto závěry však samy o sobě neimplikují, že bod H leží v trojúhelníku $X_aX_bX_c$. Není jimi totiž vyloučena situace z obrázku, na kterém je neprázdným průnikem tří zmíněných polorovin a tří zmíněných úhlů žlutě vybarvená oblast.



Vyloučit tuto situaci a současně dokázat, že z tvrzení o dvojicích úseček (AH, X_bX_c), (BH, X_bX_c), (CH, X_cX_a) plyne potřebný závěr $H \in \triangle X_aX_bX_c$, můžeme následovně.

Uvažme šestiúhelník $\mathcal{M} = AX_cBX_aCX_b$, který dostaneme, když k trojúhelníku ABC podél jeho stran „přilepíme“ vnějším způsobem trojúhelníky ABX_c, BCX_a a CAX_b, které jsou souměrně sdružené po řadě s trojúhelníky ABX, BCX a CAX. Tento popis vzniku šestiúhelníku $\mathcal{M}$ nám určuje jeho vnitřek, podle kterého nyní rozhodneme o konvexnosti všech jeho vnitřních úhlů.** O úhlech u vrcholů A, B, C to už víme z řešení. Úhly u zbylých vrcholů X_a, X_b, X_c jsou však shodné po řadě s úhly AXB, BXC, CXA, takže jsou také konvexní, protože bod X leží uvnitř trojúhelníku ABC. Šestiúhelník $\mathcal{M}$ je tudíž konvexní. Z toho, že úsečka AH protíná úsečku X_bX_c, tím pádem plyne, že bod H leží v polorovině $X_aX_bX_c$, neboť ta je díky konvexnosti $\mathcal{M}$ polorovinou opačnou k X_bX_cA. Analogickou úvahou o úsečkách BH a CH dohromady dostaneme, že bod H leží ve všech třech polorovinách $X_aX_bX_c$, $X_bX_cX_a$ a $X_cX_aX_b$, tudíž skutečně platí $H \in \triangle X_aX_bX_c$.

* Tento poznatek o ostroúhlém trojúhelníku ABC lze při obvyklém značení velikostí úhlů dokázat takto: díky $AH \perp BC$ platí $|\sphericalangle BAH| = 90° - \beta$, podobně díky $BH \perp AC$ platí $|\sphericalangle ABH| = 90° - \alpha$, odkud $|\sphericalangle AHB| = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$, zatímco $|\sphericalangle AC'B| = |\sphericalangle ACB| = \gamma$; navíc body C' a H leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou AB.

** Přesněji máme na mysli, že velikosti těchto úhlů jsou menší než 180°.