# 10.Evropská dívčí matematická olympiáda

Ve dnech 9.-15. dubna 2021 se konala 10. Evropská dívčí matematická olympiáda. Letošní ročník proběhl virtuálně, proto i naše soutěžící řešily úlohy z pohodlí domova. Pořádajícím státem byla Gruzie. Formát soutěže je podobný systému mezinárodní matematické olympiády, tedy 6 úloh na dva dny s maximálním počtem 7 bodů za úlohu.

Celkově se zúčastnilo 213 soutěžících z 55 států (z nich 37 evropských). České družstvo reprezentovaly: *Vendula Onderková* (7/8 G Jakuba Škody, Přerov), *Klára Pernicová* (8/8 G Brno, třída Kapitána Jaroše), *Adéla Heroudková* (7/8 G Brno, třída Kapitána Jaroše) a *Adéla Karolína Žáčková* (8/8 G Christiana Dopplera, Praha 5). Vedoucími pak byli *Pavel Šalom* a *Lenka Kopfová*.

Soutěžní úlohy se oproti předchozím ročníkům ukázaly být mnohem náročnější. Na bronzovou medaili bylo potřeba 8 bodů (tedy vyřešit jednu úlohu a kousek), na stříbrnou pak stačilo vyřešit dvě úlohy (14 bodů) a na zlatou tři úlohy (21 bodů). Tyto bodové hranice se určují podle výsledků evropských soutěžících tak, aby zhruba polovina získala medaili a poměr bronz : stříbro : zlato byl přibližně 3:2:1.

I s náročnými úlohami si ale české družstvo nevedlo špatně. Každá ze soutěžících vyřešila alespoň jednu úlohu a díky hodnotným myšlenkám v dalších úlohách si nakonec všechny čtyři vybojovaly bronzovou medaili. Nejlépe dopadla *Klára Pernicová* se 13 body na 58. místě, které stříbro uteklo o jediný bod. Následovaná *Adélou Heroudkovou* se ziskem 10 bodů (81.místo), *Adélou Karolínou Žáčkovou* s 9 body (89. místo) a *Vendulou Onderkovou* s 8 body (97. místo).

Podrobněji výsledky uvádíme v tabulce (v sekci umístění je nejprve absolutní pořadí a poté pořadí v rámci evropských soutěžících):

| Umístění | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Body | Cena |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 58./39. | Klára Pernicová | 7 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 13 | B |
| 81./56. | Adéla Heroudková | 7 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 10 | B |
| 89./60. | Adéla Karolína Žáčková | 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 9 | B |
| 97./65. | Vendula Onderková | 0 | 0 | 1 | 7 | 0 | 0 | 8 | B |
| | Celkem | 21 | 1 | 4 | 12 | 2 | 0 | 40 | |

Absolutními vítězkami se staly tři ruské studentky *Ralina Iusupova*, *Rozalina Mirgalimova* a *Anna Piatkova* s plným počtem bodů. V pořadí zemí se pak Česká Republika umístila na 22. místě hned za Slovenskem, které získalo dvě stříbrné a jednu bronzovou medaili. Více informací lze nalézt ve výsledkové listině. Závěrečný ceremoniál je pak dostupný ve formě videa na stránkách letošního ročníku.

Kromě zahajovacího a závěrečného ceremoniálu nebyl pro účastníky žádný online program, proto jsme se v rámci českého družstva aspoň několikrát potkali na zoomu, kde jsme si mohli popovídat o úlohách a aspoň trochu se seznámit.

Pro naladění mezinárodnějšího ducha pak proběhlo také dobrovolné online setkání se slovenským týmem.

Na závěr uvádíme soutěžní úlohy z jednotlivých dnů. Vzorová řešení v angličtině jsou pak k nalezení zde.

## První soutěžní den

**Úloha 1.** Číslo 2021 je *bombastické*. Pokud je libovolné číslo z množiny $\{m, 2m+1, 3m\}$ bombastické pro nějaké kladné celé číslo $m$, potom jsou všechna čísla z této množiny bombastická. Plyne z toho, že číslo $2021^{2021}$ je bombastické?

**Úloha 2.** Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takové, že rovnice

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

platí pro všechna racionální čísla $x$ a $y$.

*Symbol $\mathbb{Q}$ zde značí množinu všech racionálních čísel.*

**Úloha 3.** Nechť $ABC$ je trojúhelník s tupým úhlem při vrcholu $A$. Nechť $E$ a $F$ jsou v tomto pořadí průsečíky osy vnějšího úhlu při vrcholu $A$ s výškami trojúhelníku $ABC$ procházejícími vrcholy $B$ a $C$. Na úsečkách $EC$ a $FB$ zvolme postupně body $M$ a $N$ tak, aby $|\sphericalangle EMA| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle ANF| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že body $E$, $F$, $N$, $M$ leží na jedné kružnici.

## Druhý soutěžní den

**Úloha 4.** V trojúhelníku $ABC$ označme $I$ střed kružnice jemu vepsané a zvolme libovolný bod $D$ na straně $BC$. Označme $E$ průsečík přímky kolmé na $BI$ procházející bodem $D$ s přímkou $CI$. Označme $F$ průsečík přímky kolmé na $CI$ procházející bodem $D$ s přímkou $BI$. Dokažte, že obraz bodu $A$ v osové souměrnosti podle přímky $EF$ leží na přímce $BC$.

**Úloha 5.** V rovině zvolme bod $O$ a nazvěme jej počátek. Nechť $P$ je množina 2021 bodů v této rovině takových, že

(i) žádné tři body z množiny $P$ neleží na jedné přímce a

(ii) žádné dva body z množiny $P$ neleží na přímce procházející počátkem.

Trojúhelník s vrcholy v množině $P$ nazveme *tlustý*, pokud $O$ je jeho vnitřním bodem. Určete maximální počet tlustých trojúhelníků.

**Úloha 6.** Existuje nezáporné celé číslo $a$, pro které má rovnice

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

více než milión různých řešení $(m, n)$, kde $m$ a $n$ jsou kladná celá čísla?