71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii A

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Je možné vyplnit tabulku $n\times n$ jedničkami a dvojkami tak, aby byl součet čísel v každém řádku dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci dělitelný sedmi? Řešte a) pro $n=9$, b) pro $n=12$.* (Tomáš Bárta)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Lze tabulku 5×5 vyplnit celými čísly tak, aby součet čísel v každém řádku byl lichý a součet čísel v každém sloupci sudý?

N2. Pro která $n \leqq 8$ lze tabulku $n\times n$ vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze?

N3. Pro která $d \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček?

D1. Udejte příklad vyplnění tabulky 71×71, které vyhovuje zadání soutěžní úlohy.

D2. Dokažte, že tabulku $n\times n$ lze vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze pro každé $n \geqq 18$.

D3. Je možné obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě černě a bíle tak, aby v každém řádku bylo jen konečně mnoho políček černých a v každém sloupci jen konečně mnoho políček bílých?

2. *Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že tečny vedené z bodu A ke kružnici k se středem O jsou souměrně sdružené podle přímky OA.

N2. Dokažte, že v libovolném lichoběžníku je spojnice středů jeho ramen rovnoběžná s jeho základnami.

D1. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD se protínají v bodě P a přímky AD, BC v bodě Q. Dokažte, že středy základen AB, CD leží na přímce PQ.

D2. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD označme P průsečík os vnějších úhlů u vrcholů A, D a podobně Q průsečík os vnějších úhlů u vrcholů B, C. Dokažte, že délka úsečky PQ je rovna polovině obvodu $ABCD$.

D3. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ takový, že trojúhelníky ABC, BCD, CDE, DEA mají všechny shodný obsah. Úsečky AC, AD protnou úsečku BE postupně v bodech M, N. Dokažte, že $|BM| = |NE|$.

D4. V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík polopřímek AD a BC, dále Q průsečík polopřímek BA a CD a konečně R kolmý průmět bodu D na přímku PQ. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ADQ a CDP jsou z bodu R vidět pod stejným úhlem.

3. *Najděte všechna celá čísla $n > 2$ taková, že číslo n^{n-2} je n-tá mocnina celého čísla.*
(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte nejmenší kladné celé číslo n takové, že $75 \cdot n$ je třetí mocnina celého čísla.

N2. Uvažme celé $k \geqq 2$. Dokažte, že pokud v rovnosti $a \cdot b = c$ jsou dvě ze tří zastoupených kladných celých čísel a, b, c rovna k-tým mocninám celých čísel, je takové i číslo třetí.

N3. Dokažte, že pro všechna dostatečně velká kladná celá čísla n platí:
a) $n^2 > 10n + 100$, b) $2^n > 10n^2$, c) $3^n > 10 \cdot 2^n$.

D1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n, k větší než 1 je číslo $\sqrt[k]{n}$ buďto celé, nebo iracionální.

D2. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která je $n^2 + n - 11$ druhou mocninou celého čísla.

D3. Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.

D4. Pro které dvojice celých čísel x a y platí $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$?

4. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} xy + 1 &= z^2, \\ yz + 2 &= x^2, \\ zx + 3 &= y^2. \end{aligned}$$

(Tomáš Jurík)

Návodné a doplňující úlohy:

Řešení soustavy rovnic často zahajujeme tak, že některé dvě její rovnice od sebe odečteme nebo několik jejích rovnic sečteme. Někdy se přitom vyplatí zmíněné rovnice předem vynásobit vhodnými čísly nebo i výrazy s neznámými, abychom získali jejich co nejjednodušší důsledek.

N1. Použijte popsanou metodu k vyřešení soustav: a) $3x + 2y = x^2 \wedge 2x + 3y = y^2$, b) $3xy - 10 = 2x^2 \wedge 2xy + 15 = 3y^2$ v oboru $\mathbb{R}$.

N2. Ukažte, že z prvních dvou rovnic soustavy ze soutěžní úlohy vyplývá, že obě čísla $z - x$ a $x + y + z$ jsou různá od nuly. Jaké jsou obdobné důsledky jiných dvou rovnic?

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

D3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1, \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

D4. Navzájem různá reálná čísla a, b, c splňují $a + 1/b = b + 1/c = c + 1/a$. Dokažte, že $|abc| = 1$.

D5. Najděte všechna reálná čísla $x \geqq 3$, pro která platí

$$x + \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-2)(x-3)} = 5.$$

D6. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$, pro která existují reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ taková, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

5. *V různostranném trojúhelníku ABC označme I střed vepsané kružnice a k kružnici opsanou. Polopřímky BI a CI protnou kružnici k po řadě v bodech $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokažte, že tečna ke kružnici k v bodě A, přímka vedená bodem I rovnoběžně se stranou BC a přímka S_bS_c se protínají v jednom bodě.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte *tvrzení „o Švrčkově bodu“*: V libovolném trojúhelníku ABC prochází osa vnitřního úhlu BAC středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A.

N2. Dokažte *tvrzení „o třech prstech“*: V daném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a S střed toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. Pak platí $|SB| = |SI| = |SC|$.

N3. Dokažte, že v soutěžní úloze je přímka S_bS_c osou úsečky AI.

N4. Dokažte *větu o úsekovém úhlu*: Uvažme trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k, tečnu kružnice k vedenou bodem B a bod T na této tečně v polorovině opačné k polorovině BCA. Pak platí $|\sphericalangle TBC| = |\sphericalangle BAC|$. (Úhel TBC je tzv. *úsekový úhel* příslušný tomu oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A.)

D1. V situaci ze soutěžní úlohy označme dále $S_a \neq A$ průsečík polopřímky AI s kružnicí k. Dokažte, že bod I je průsečíkem výšek trojúhelníku $S_aS_bS_c$.

D2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.

D3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný.

D4. Označme I střed kružnice vepsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Jeho vnitřní bod P splňuje podmínku $|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|$. Dokažte, že $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$.

D5. Osy vnitřních úhlů u vrcholů B, C ostroúhlého trojúhelníku ABC protnou protější strany po řadě v bodech K, L. Označme M průsečík přímky BK s osou úsečky CL. Bod N leží na přímce CL tak, že $NK \parallel LM$. Dokažte, že $|NK| = |NB|$.

6. *Uvažujme nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ celých čísel, která splňuje podmínky $a_0 \geqq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pro všechny indexy $n \geqq 0$. Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.*

(Martin Melicher, Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte všechna kladná celá čísla t taková, že čísla t, $2t-1$ a $2t+1$ jsou všechna prvočísla.

N2. Jsou dána reálná čísla d a $q \notin \{0, 1\}$. Dokažte, že posloupnost čísel $x_0, x_1, \ldots$ splňuje pro každý index i rovnost $x_{i+1} = qx_i + d$, právě když je její obecný člen tvaru $x_i = Kq^i + c$, kde $c = d/(1-q)$ a K je libovolná konstanta (určená prvním členem x_0).

N3. Uvažme jakékoliv zobrazení $f\colon M \to M$ na konečné množině M a prvek $m \in M$. Dokažte, že posloupnost $m, f(m), f(f(m)), \ldots$ je od jistého členu periodická. Dále dokažte, že pokud zobrazení f je prosté, pak tato posloupnost je periodická od svého prvního členu m.

N4. Dokažte, že pro každé liché číslo d se zbytky čísel $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ po dělení číslem d od prvního místa periodicky opakují.

N5. Dokažte *malou Fermatovu větu*: Pro libovolné prvočíslo p a celé číslo a nesoudělné s p platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

D1. Dokažte, že každé kladné celé číslo n má násobek, v jehož desítkovém zápisu se vyskytují jen nuly a jedničky.

D2. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n existuje n-místné číslo a_n, které je násobkem 5^n a jehož všechny číslice jsou liché.

D3. Dokažte, že každé kladné celé číslo d má násobek, který je Fibonacciho číslem. (Fibonacciho čísla jsou určena vztahy $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro každý index $n \geqq 1$.)

D4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dávají po dělení čtyřmi zbytek 3.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Je možné vyplnit tabulku $n\times n$ jedničkami a dvojkami tak, aby byl součet čísel v každém řádku dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci dělitelný sedmi? Řešte*
a) pro $n = 9$, b) pro $n = 12$. (Tomáš Bárta)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Lze tabulku 5×5 vyplnit celými čísly tak, aby součet čísel v každém řádku byl lichý a součet čísel v každém sloupci sudý? [Nelze. Pro spor předpokládejme opak a označme S součet čísel v celé tabulce. Sčítáním přes řádky je S rovno součtu pěti lichých čísel, tedy je liché. Sčítáním přes sloupce je S rovno součtu sudých čísel, tedy je sudé.]

N2. Pro která $n \leqq 8$ lze tabulku $n \times n$ vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze? [Pouze pro $n = 5$ a $n = 7$. V případě $n \leqq 6$ je součet čísel v každém sloupci nejvýše 12, takže kvůli dělitelnosti 7 musí být roven 7. Součet čísel v celé tabulce proto musí být roven $7n$, podle součtů čísel v řádcích to však musí být násobek pěti, takže nutně $n = 5$. Příklad pro $n = 5$: tři řádky vyplníme jedničkami, dva řádky dvojkami. Příklad pro $n = 7$: čtyři sloupce vyplníme jedničkami, tři sloupce dvojkami. V případě $n = 8$ je součet čísel v každém sloupci v rozmezí 8–16, takže kvůli dělitelnosti sedmi musí být roven 14. Součet všech čísel v tabulce je pak $8 \cdot 14$, což není násobek pěti, takže takový není ani součet čísel v některém řádku.]

N3. Pro která $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček? [Pro každé takové d: Pro dané d lze například obarvit políčka, která na obrázku obsahují čísla nejvýše rovna d.

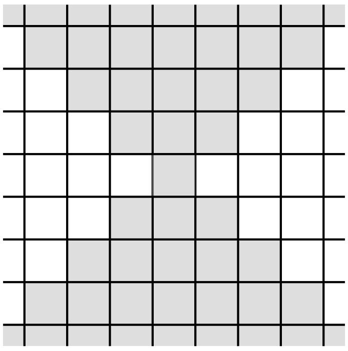
1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

]

D1. Udejte příklad vyplnění tabulky 71×71, které vyhovuje zadání soutěžní úlohy. [Protože číslo $140 = 69 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ je násobkem pěti i násobkem sedmi, vyhovuje každé vyplnění, kdy je v každém řádku i sloupci 69 dvojek a 2 jedničky. K tomu stačí tabulku vyplnit „cyklicky“: do prvního řádku napsat $(1, 1, 2, 2 \ldots, 2)$, do druhého $(2, 1, 1, 2, 2, \ldots, 2)$ atd., až do posledního 71. řádku $(1, 2, 2, \ldots, 2, 1)$.]

D2. Dokažte, že tabulku $n \times n$ lze vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze pro každé $n \geqq 18$. [Podmínka $n \geqq 18$ zaručuje existenci celého čísla s, které je násobkem 35 a splňuje nerovnosti $n \leqq s \leqq 2n$. Součet čísel v každém řádku i sloupci tabulky $n \times n$ bude roven určenému číslu s, pokud v každém řádku i sloupci bude $2n - s$ jedniček a $s - n$ dvojek. Dosáhneme toho podobně jako v řešení úlohy D1, když řádky tabulky postupně vyplníme „cyklickými“ změnami požadované sestavy jedniček a dvojek.]

D3. Je možné obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě černě a bíle tak, aby v každém řádku bylo jen konečně mnoho políček černých a v každém sloupci jen konečně mnoho políček bílých? [Ano, například jako na obrázku:



]

2. *Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2.*

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že tečny vedené z bodu A ke kružnici k se středem O jsou souměrně sdružené podle přímky OA. [Stačí dokázat, že souměrně sdružené jsou body dotyku T_1, T_2 uvažovaných tečen. Jsou to však průsečíky dané kružnice k s Thaletovou kružnicí nad průměrem OA a obě tyto kružnice jsou podle přímky OA souměrné. Jinak rovněž stačí ověřit shodnost trojúhelníků T_1OA a T_2OA podle věty Ssu.]

N2. Dokažte, že v libovolném lichoběžníku je spojnice středů jeho ramen rovnoběžná s jeho základnami. [Rozdělme daný lichoběžník jednou jeho úhlopříčkou na dva trojúhelníky a uvažme jejich střední příčky rovnoběžné se základnami lichoběžníku. Odtud užitím známých vlastností trojúhelníkových příček plyne, že spojnice středů ramen lichoběžníku je nejen rovnoběžná s jeho základnami, ale navíc má délku rovnou aritmetickému průměru jejich délek.]

D1. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD se protínají v bodě P a přímky AD, BC v bodě Q. Dokažte, že středy základen AB, CD leží na přímce PQ. [Bod P je vnitřním středem stejnolehlosti úseček AB a CD, bod Q je vnějším středem jejich stejnolehlosti. V obou stejnolehlostech si středy úseček AB, CD odpovídají, takže leží se středy stejnolehlostí P, Q na téže přímce.]

D2. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD označme P průsečík os vnějších úhlů u vrcholů A, D a podobně Q průsečík os vnějších úhlů u vrcholů B, C. Dokažte, že délka úsečky PQ je rovna polovině obvodu $ABCD$. [Jelikož body P, Q leží na osách dvou úhlů, jsou to středy kružnic dotýkajících se přímek AB, CD a po řadě ramen AD, BC. Body P, Q proto leží na ose pásu mezi rovnoběžkami AB a CD, která prochází středy M, N ramen AD, BC. Snadno dopočítáme, že $|\sphericalangle APD| = 90° = |\sphericalangle BQC|$, takže body P, Q leží na kružnicích s průměry AD, BC. Při obvyklém označení délek stran $ABCD$ tak platí

$$|PQ| = |PM| + |MN| + |NQ| = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$ (Mexiko 1999)]

D3. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ takový, že trojúhelníky ABC, BCD, CDE, DEA mají všechny shodný obsah. Úsečky AC, AD protnou úsečku BE postupně v bodech M, N. Dokažte, že $|BM| = |NE|$. [Z rovnosti obsahů BCD a CDE plyne $BE \parallel CD$. Podobně dokážeme $BC \parallel AD$ a $DE \parallel AC$, takže trojúhelníky BCM a NDE jsou podobné (uu). Jelikož $BE \parallel CD$, výšky těchto dvou trojúhelníků z vrcholů C, D jsou shodné, takže jde o dva shodné trojúhelníky, a proto $|BM| = |NE|$. (Jižní Afrika 2003)]

D4. V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík polopřímek AD a BC, dále Q průsečík polopřímek BA a CD a konečně R kolmý průmět bodu D na přímku PQ. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ADQ a CDP jsou z bodu R vidět pod stejným úhlem. [Označme I, J středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ADQ, CDP a r_i, r_j jejich poloměry. Díky podobným trojúhelníkům stačí dokázat rovnost $|RI|/|RJ| = r_i/r_j$. Dále označme K střed a r poloměr kružnice vepsané čtyřúhelníku $ABCD$ a E průsečík přímek IJ a PQ. Body K, I leží na ose úhlu BQC tak, že $|QK|/|QI| = r/r_i$. Podobně body K, J leží na ose úhlu APB tak, že $|PK|/|PJ| = r/r_j$. Po dosazení za druhý a třetí zlomek v rovnosti

$$\frac{|EI|}{|EJ|} \cdot \frac{|PJ|}{|PK|} \cdot \frac{|QK|}{|QI|} = 1$$

(Menelaova věta pro trojúhelník IJK) vychází $|EI|/|EJ| = r_i/r_j$. Zároveň zřejmě platí i $|DI|/|DJ| = r_i/r_j$. Kružnice s průměrem DE je tedy Apolloniovou kružnicí pro body I, J a poměr r_i/r_j. Jelikož $|\sphericalangle DRE| = 90°$, bod R leží na této kružnici, a tak platí $|RI|/|RJ| = r_i/r_j$, jak jsme chtěli dokázat. (Rusko 2008)]

3. *Najděte všechna celá čísla $n > 2$ taková, že číslo n^{n-2} je n-tá mocnina celého čísla.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte nejmenší kladné celé číslo n takové, že $75 \cdot n$ je třetí mocnina celého čísla. [Celé číslo je třetí mocninou, právě když se v jeho rozkladu na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnině, která je násobkem tří. Jelikož $75 = 3 \cdot 5^2$, hledané nejmenší n je rovno $3^2 \cdot 5 = 45$.]

N2. Uvažme celé $k \geqq 2$. Dokažte, že pokud v rovnosti $a \cdot b = c$ jsou dvě ze tří zastoupených kladných celých čísel a, b, c rovna k-tým mocninám celých čísel, je takové i číslo třetí. [Vyjdeme z poznatku, že celé číslo je k-tou mocninou, právě když se v jeho rozkladu na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnině, která je násobkem čísla k. V naší situaci pro libovolné prvočíslo p označme α, β, γ (nezáporné) počty zastoupení tohoto p v rozkladech na prvočinitele po řadě čísel a, b, c. Pak rovnost $a \cdot b = c$ znamená $\alpha + \beta = \gamma$, takže dokazované tvrzení plyne ze zřejmé poučky: jsou-li dvě z takových čísel α, β, γ dělitelná daným číslem k, je takové i číslo třetí.]

N3. Dokažte, že pro všechna dostatečně velká kladná celá čísla n platí:
a) $n^2 > 10n + 100$, b) $2^n > 10n^2$, c) $3^n > 10 \cdot 2^n$. [(a) Je-li $n > 20$, zřejmě platí

$n^2 - 10n - 100 = n(n-10) - 100 > 20 \cdot 10 - 100 > 0$. b) Pro $n = 10$ platí $2^{10} = 1024 > 1000 = 10 \cdot 10^2$. Navíc pokud dokazovaná nerovnost platí pro nějaké $n \geqq 10$, pak platí i pro $n+1$: Skutečně, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 10n^2 \geqq 10(n+1)^2$, kde poslední nerovnost platí, protože je ekvivalentní s nerovností $n(n-2) \geqq 1$, zřejmě platnou dokonce pro každé $n \geqq 3$. c) I když i zde je důkaz indukcí snadný, ukažme, jak se obejít bez ní: Nerovnost přepsaná ve tvaru $(\frac{3}{2})^n > 10$ je splněna (s ohledem na $\frac{3}{2} > 1$ a odtud plynoucí fakt, že funkce $y = (\frac{3}{2})^x$ je rostoucí), právě když platí $n > \log_{\frac{3}{2}}(10) \doteq 5{,}68$.]

D1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n, k větší než 1 je číslo $\sqrt[k]{n}$ buďto celé, nebo iracionální. [Předpokládejme, že číslo $\sqrt[k]{n}$ je racionální, takže $\sqrt[k]{n} = u/v$, kde u a v jsou celá kladná čísla. Pak platí rovnost $n \cdot v^k = u^k$ a z výsledku úlohy N2 plyne, že rovněž číslo n je k-tou mocninou celého čísla, tj. číslo $\sqrt[k]{n}$ je celé.]

D2. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která je $n^2 + n - 11$ druhou mocninou celého čísla. [Snadno ověříme, že pro $n > 11$ platí $n^2 < n^2 + n - 11 < (n+1)^2$. Stačí tedy probrat $n \leqq 11$. Vyhovují $n \in \{3, 4, 11\}$.]

D3. Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$. [59–A–III–1]

D4. Pro které dvojice celých čísel x a y platí $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$? [Shortlist IMO 2006, Problem N1. (IMO 2006)]

4. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} xy + 1 &= z^2, \\ yz + 2 &= x^2, \\ zx + 3 &= y^2. \end{aligned}$$

(Tomáš Jurík)

Návodné a doplňující úlohy:

Řešení soustavy rovnic často zahajujeme tak, že některé dvě její rovnice od sebe odečteme nebo několik jejích rovnic sečteme. Někdy se přitom vyplatí zmíněné rovnice předem vynásobit vhodnými čísly nebo i výrazy s neznámými, abychom získali jejich co nejjednodušší důsledek.

N1. Použijte popsanou metodu k vyřešení soustav: a) $3x + 2y = x^2 \wedge 2x + 3y = y^2$, b) $3xy - 10 = 2x^2 \wedge 2xy + 15 = 3y^2$ v oboru $\mathbb{R}$. [a) $(x,y) \in \{(0,0),(5,5)\}$ a $(x,y) \in \{(2,-1),(-1,2)\}$. Odečtením rovnic a úpravou výsledku dostaneme $(x-y)(x+y-1) = 0$, odkud $y = x$ nebo $y = 1 - x$. Po dosazení takových y vyjdou v prvním, resp. druhém případě vždy dvě výše uvedená řešení. b) $(x,y) \in \{(2,3),(-2,-3)\}$. Vynásobme dané rovnice po řadě výrazy y a x. Po jejich následném sečtení se ve výsledku kubické členy navzájem zruší a dostaneme tak rovnici $15x - 10y = 0$, podle které $x = 2t$ a $y = 3t$ pro vhodné reálné t. Po dosazení takových x a y vyjde rovnice $t^2 = 1$ s kořeny $t = \pm 1$, kterým odpovídají výše uvedená řešení.]

N2. Ukažte, že z prvních dvou rovnic soustavy ze soutěžní úlohy vyplývá, že obě čísla $z - x$ a $x + y + z$ jsou různá od nuly. Jaké jsou obdobné důsledky jiných dvou rovnic? [Posuzované dvě rovnice od sebe odečtěte a výsledek pak upravte.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y^2 &= y^3, \\ y + x^2 &= x^3. \end{aligned}$$

[57–A–III–1]

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= |y - z| + 1, \\ y^2 - zx &= |z - x| + 1, \\ z^2 - xy &= |x - y| + 1. \end{aligned}$$

[68–A–III–1]

D3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \qquad \frac{1}{y+z} + x = 1, \qquad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

[69–A–II–1]

D4. Navzájem různá reálná čísla a, b, c splňují $a + 1/b = b + 1/c = c + 1/a$. Dokažte, že $|abc| = 1$. [První rovnost přepíšeme na $a - b = 1/c - 1/b = (b - c)/(bc)$. Podobně obdržíme $b - c = (c - a)/(ca)$ a $c - a = (a - b)/(ab)$. Po vynásobení tří odvozených rovností a následném vydělení nenulovým číslem $(a - b)(b - c)(c - a)$ už získáme požadované $(abc)^2 = 1$.]

D5. Najděte všechna reálná čísla $x \geqq 3$, pro která platí

$$x + \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-2)(x-3)} = 5.$$

[Odečteme jedničku a upravíme na

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}) = 4.$$

Po podobném odečtení dvojky, resp. trojky získáme

$$\begin{aligned} (\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) &= 3, \\ (\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) &= 2. \end{aligned}$$

Odvozenou trojici vztahů teď snadno vyřešíme jako soustavu: Vydělíme-li vždy součin dvou rovnic tou třetí, dostaneme (s ohledem na nezápornost součtu dvou odmocnin)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} &= \sqrt{4 \cdot 3/2} = \frac{1}{2}\sqrt{24}, \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} &= \sqrt{4 \cdot 2/3} = \frac{1}{3}\sqrt{24}, \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} &= \sqrt{3 \cdot 2/4} = \frac{1}{4}\sqrt{24}, \end{aligned}$$

z čehož už snadno (jako ze soustavy tří lineárních rovnic pro neznámé hodnoty tří zastoupených odmocnin) určíme

$$\sqrt{x-1} = \frac{7}{24}\sqrt{24}, \qquad \sqrt{x-2} = \frac{5}{24}\sqrt{24}, \qquad \sqrt{x-3} = \frac{1}{24}\sqrt{24}.$$

Těmto třem vztahům vyhovuje jediné číslo $x = 73/24$. Zkouška dosazením do původní rovnice je snadná.]

D6. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$, pro která existují reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ taková, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. [Jakékoliv $n \geqq 3$ dělitelné třemi. Vynásobíme-li i-tou rovnici číslem a_{i+2} a všechny je pak sečteme, vznikne na levé straně součet členů $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ a součet členů a_{i+2}. Téhož výsledku na levé straně lze dosáhnout, pokud před sečtením vynásobíme i-tou rovnici číslem a_{i-1} (položíme přitom $a_0 = a_n$). Rovnost obou vzniklých pravých stran $\sum_{i=1}^n a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i-1}a_{i+2}$ lze přepsat do tvaru $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (a_{i-1} - a_{i+2})^2 = 0$, takže musí platit $a_{i-1} = a_{i+2}$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odtud v případě $3 \nmid n$ vidíme, že dokonce všechna čísla a_i musí být stejná, což nelze, neboť rovnice $x^2 + 1 = x$ nemá reálné řešení. Naopak v případě $3 \mid n$ podmínkám ze zadání úlohy zřejmě vyhovíme n-ticí $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (2, -1, -1, \ldots, 2, -1, -1)$. (IMO 2018)]

5. *V různostranném trojúhelníku ABC označme I střed vepsané kružnice a k kružnici opsanou. Polopřímky BI a CI protnou kružnici k po řadě v bodech $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokažte, že tečna ke kružnici k v bodě A, přímka vedená bodem I rovnoběžně se stranou BC a přímka S_bS_c se protínají v jednom bodě.* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte *tvrzení „o Švrčkově bodu“*: V libovolném trojúhelníku ABC prochází osa vnitřního úhlu BAC středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. [Označme $S \neq A$ druhý průsečík osy úhlu BAC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Kratším obloukům SB, SC kružnice opsané příslušejí stejně velké obvodové úhly, takže tyto oblouky jsou shodné.]

N2. Dokažte *tvrzení „o třech prstech“*: V daném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a S střed toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. Pak platí $|SB| = |SI| = |SC|$. [S ohledem na symetrii stačí dokázat jen rovnost $|SB| = |SI|$. Při standardním značení velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC platí

$$|\sphericalangle SBI| = |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle SAC| + \beta/2 = \alpha/2 + \beta/2.$$

Protože SIB je vnější úhel trojúhelníku ABI, platí rovněž

$$|\sphericalangle SIB| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \alpha/2 + \beta/2.$$

Trojúhelník SIB tak skutečně má shodná ramena SB a SI.]

N3. Dokažte, že v soutěžní úloze je přímka S_bS_c osou úsečky AI. [Podle výsledku úlohy N2 platí $|S_bA| = |S_bI|$ a $|S_cA| = |S_cI|$, takže S_A, S_B jsou dva různé body osy úsečky AI.]

N4. Dokažte *větu o úsekovém úhlu*: Uvažme trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k, tečnu kružnice k vedenou bodem B a bod T na této tečně v polorovině opačné k polorovině BCA. Pak platí $|\sphericalangle TBC| = |\sphericalangle BAC|$. (Úhel TBC je tzv. *úsekový úhel* příslušný tomu oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A.) [Označme Y libovolný vnitřní bod toho oblouku BC, který neobsahuje bod A. Pak YBC je obvodový úhel shodný s obvodovým úhlem YAC. Limitním přechodem $Y \to B$ dostaneme, že úsekový úhel TBC má stejnou velikost jako obvodový úhel BAC. (Tečna TB je totiž limitní polohou sečny YB.)]

D1. V situaci ze soutěžní úlohy označme dále $S_a \neq A$ průsečík polopřímky AI s kružnicí k. Dokažte, že bod I je průsečíkem výšek trojúhelníku $S_aS_bS_c$. [Přímka S_bS_c je jakožto osa úsečky AI (viz N3) kolmá na S_aI. Podobně přímka S_bI je kolmá na S_aS_c.]

D2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN. [70–A–III–2]

D3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D4. Označme I střed kružnice vepsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Jeho vnitřní bod P splňuje podmínku $|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|$. Dokažte, že $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$. [Nechť $|\sphericalangle PBA| = \frac{1}{2}\beta + \delta$, pak $|\sphericalangle PBC| = \frac{1}{2}\beta - \delta$ a ze zadané úhlové podmínky snadno plyne $|\sphericalangle PCA| = \frac{1}{2}\gamma - \delta$ a $|\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}\gamma + \delta$. Odtud $|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, takže úhel BPC má velikost $90° + \frac{1}{2}\gamma$, což je jak známo i velikost úhlu BIC. Proto bod P z poloroviny BCA leží na oblouku BIC kružnice opsané trojúhelníku BIC. Ta má střed ve středu kratšího oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, což je bod na polopřímce AI, takže I je tím bodem oblouku BIC, který je k bodu A nejblíže. (IMO 2006)]

D5. Osy vnitřních úhlů u vrcholů B, C ostroúhlého trojúhelníku ABC protnou protější strany po řadě v bodech K, L. Označme M průsečík přímky BK s osou úsečky CL. Bod N leží na přímce CL tak, že $NK \parallel LM$. Dokažte, že $|NK| = |NB|$. [Bod M jakožto průsečík osy ostrého úhlu CBL a osy úsečky CL je středem kratšího oblouku CL kružnice opsané trojúhelníku BCL. Odtud a ze zadané rovnoběžnosti plyne $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MLC| = |\sphericalangle KNC|$, takže čtyřúhelník $BCKN$ je tětivový. Proto bod N leží na kratším oblouku BK kružnice opsané trojúhelníku BCK, který má totiž ostrý úhel u vrcholu C, na jehož ose bod N rovněž leží. Je tak středem zmíněného oblouku BK, odkud již plyne $|NK| = |NB|$. (Junior Balkan 2010)]

6. *Uvažujme nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ celých čísel, která splňuje podmínky $a_0 \geqq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pro všechny indexy $n \geqq 0$. Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.*

(Martin Melicher, Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechna kladná celá čísla t taková, že čísla t, $2t - 1$ a $2t + 1$ jsou všechna prvočísla. [$t = 2$ a $t = 3$, kdy jde o trojice prvočísel $(2, 3, 5)$, resp. $(3, 5, 7)$. Protože

$t = 1$ není prvočíslo, zbývá vyloučit případ $t \geqq 4$. Tehdy prvočíslo t dává při dělení třemi zbytek 1 nebo 2. Pokud $t = 3k + 1$, kde $k \geqq 1$, je číslo $2t + 1 = 6k + 3 \geqq 9$ dělitelné třemi. Pokud $t = 3k+2$, kde $k \geqq 1$, je číslo $2t-1 = 6k+3 \geqq 9$ dělitelné třemi.]

N2. Jsou dána reálná čísla d a $q \notin \{0, 1\}$. Dokažte, že posloupnost čísel $x_0, x_1, \ldots$ splňuje pro každý index i rovnost $x_{i+1} = qx_i + d$, právě když je její obecný člen tvaru $x_i = Kq^i + c$, kde $c = d/(1-q)$ a K je libovolná konstanta (určená prvním členem x_0). [Číslo c je zadáno tak, že rovnosti $x_{i+1} = qx_i + d$ lze přepsat do tvaru $x_{i+1} - c = q(x_i - c)$. Tyto upravené rovnosti znamenají právě to, že čísla $y_i = x_i - c$ tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem q, tj. že $y_i = Kq^i$ pro každé i.]

N3. Uvažme jakékoliv zobrazení $f\colon M \to M$ na konečné množině M a prvek $m \in M$. Dokažte, že posloupnost $m, f(m), f(f(m)), \ldots$ je od jistého členu periodická. Dále dokažte, že pokud zobrazení f je prosté, pak tato posloupnost je periodická od svého prvního členu m. [Podle Dirichletova principu se mezi prvními $|M| + 1$ členy posloupnosti alespoň jeden prvek musí opakovat. Od jeho prvního výskytu tak posloupnost bude periodická, neboť každý další člen zadané posloupnosti je jednoznačně určen předchozím členem. Kdyby posloupnost nebyla periodická od prvního členu, našly by se v ní dva výskyty téhož prvku, kterému předchází dva různé členy, což nenastane, je-li zobrazení f prosté.]

N4. Dokažte, že pro každé liché číslo d se zbytky čísel $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ po dělení číslem d od prvního místa periodicky opakují. [Užijte obecný výsledek úlohy N3 pro zobrazení $f\colon z \mapsto 2z \pmod p$ na množině $\{1, 2, \ldots, d-1\}$.]

N5. Dokažte *malou Fermatovu větu*: Pro libovolné prvočíslo p a celé číslo a nesoudělné s p platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. [Ukažte, že zobrazení $f_a\colon t \mapsto a\cdot t \pmod p$ je prosté na množině $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, takže je to bijekce. Porovnáním součinu všech $p-1$ vzorů a součinu všech $p-1$ obrazů dostaneme

$$(p-1)! \equiv (a\cdot 1)(a\cdot 2)\ldots(a\cdot(p-1)) \equiv a^{p-1}(p-1)! \pmod p.$$

Po vydělení kongruence číslem $(p-1)!$ (nesoudělným s jejím modulem p) už vychází potřebné.]

D1. Dokažte, že každé kladné celé číslo n má násobek, v jehož desítkovém zápisu se vyskytují jen nuly a jedničky. [Z Dirichletova principu mezi čísly $1, 11, 111, \ldots$ existují dvě, která dávají stejný zbytek po dělení n. Jejich rozdíl má požadovanou vlastnost.]

D2. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n existuje n-místné číslo a_n, které je násobkem 5^n a jehož všechny číslice jsou liché. [Důkaz provedeme matematickou indukcí: Pro $n = 1$ vyhovuje $a_1 = 5$. Mějme vyhovující a_n pro některé $n \geqq 1$. Čísla $a_n + i\cdot 10^n$ pro $i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ jsou všechna násobky 5^n a přitom dávají navzájem různé zbytky po dělení 5^{n+1}, takže jedno z nich je násobkem 5^{n+1}. Toto číslo lze vzít za a_{n+1}, neboť je zřejmě $(n+1)$-místné a všechny jeho číslice jsou liché. (USA 2003)]

D3. Dokažte, že každé kladné celé číslo d má násobek, který je Fibonacciho číslem. (Fibonacciho čísla jsou určena vztahy $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro každý index $n \geqq 1$.) [Všude dále pod „zbytky“ rozumíme „zbytky po dělení daným číslem d“. Předřaďme posloupnosti Fibbonaciho čísel $\big(F_i\big)_{i=1}^{\infty}$ jako její nultý člen číslo $F_0 = F_2 - F_1 = 0$ (pak vztah ze zadání bude platit i pro $n = 0$) a sledujme zbytky jejích dvojic po sobě následujících členů. Těchto dvojic zbytků je nejvýše $d \cdot d$ různých, tedy mezi prvními $d^2 + 1$ dvojicemi se některá dvojice musí zopakovat. Jelikož navíc zbytek následujícího členu je jednoznačně určen zbytky dvou předchozích členů, je posloupnost všech zbytků od jistého místa periodická. Protože navíc ze zbytků dvou sousedních členů lze jednoznačně určit i zbytky všech předchozích členů, je posloupnost zbytků periodická od svého nultého členu, kterým je ovšem zbytek 0 (neboť $F_0 = 0$ je násobkem d, ať je dané d jakékoli). Zbytek 0 tak má dokonce nekonečně mnoho Fibonacciho čísel.]

D4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dávají po dělení čtyřmi zbytek 3. [Důkaz sporem: Připusťme, že je takových prvočísel jen konečně mnoho, a označme je všechna $p_1, \ldots, p_k$. Všimněme si, že pokud několik čísel dává po dělení čtyřmi stejný zbytek 1, má tuto vlastnost i jejich součin. Liché číslo

$$N = 4 \cdot p_1 p_2 \ldots p_k - 1$$

však dává po dělení čtyřmi zbytek 3, takže takový musí rovněž být aspoň jeden z jeho prvočinitelů (může jím být i samo číslo N). Žádné z prvočísel $p_1, \ldots, p_k$ ale není dělitelem N, spor. (Dodejme pro zajímavost proslulou *Dirichletovu větu*: Pro každá dvě nesoudělná čísla d a z (kde $1 \leqq z < d$) existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dávají po dělení číslem d zbytek z. Elementární důkaz Dirichletovy věty není znám.)]