71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod* 11 990*. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro dané prvočíslo p najděte všechny dvojice celých čísel c a d, pro něž platí $c > d$ a $cd = p^2$.

N2. Najděte všechna řešení (p, q) rovnice $p^2 = q^2 - 28q + 52$ v kladných celých číslech taková, že p je prvočíslo.

D1. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$.

D2. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

D3. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin $(a + b)(b + c)(c + a)$ je roven mocnině některého prvočísla.

D4. Najděte všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

2. *Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.* (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte známé tvrzení: Pokud v konvexním čtyřúhelníku $PQRS$ platí $PQ \parallel RS$ a $|QR| = |PS|$, pak je $PQRS$ buď rovnoběžník, nebo rovnoramenný lichoběžník.

N2. Uvažme situaci ze soutěžní úlohy. Najděte dva rovnoramenné lichoběžníky s vrcholy v bodech A, B, C, D, E, F.

N3. Dokažte známé tvrzení o shodnosti úhlopříček každého rovnoramenného lichoběžníku.

D1. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici.

D2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$.

D3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme

$E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$.

D4. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý.

D5. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.

3. *Určete počet devítimístných čísel, v nichž se číslice* $0-9$ *vyskytují nejvýše jednou a v nichž se součty číslic na* 1. *až* 3. *místě, na* 3. *až* 5. *místě, na* 5. *až* 7. *místě a na* 7. *až* 9. *místě všechny rovnají témuž číslu* 10. *Najděte rovněž nejmenší a největší z těchto čísel.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Součet devíti navzájem různých číslic je 42. Které jsou to číslice?

N2. Navzájem různé číslice a, b, c, d splňují rovnost $a + b + c + 6 = d$. Které jsou to číslice?

N3. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 1, 3, 5, 7, 9 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Kolik je takových čísel?

N4. Pokud bychom v zadání soutěžní úlohy požadovali, aby se uvažované součty číslic rovnaly 9 namísto 10, pak by takové číslo neexistovalo. Dokažte.

D1. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 0, 1, 3, 5, 8 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Určete číslici na místě stovek takového čísla.

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.

4. *Určete počet reálných kořenů rovnice* $x|x + 6A| = 36$ *v závislosti na reálném parametru* A. (Vojtěch Bálint)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte minimum funkce $f(x) = x(x + 6)$.

N2. Určete počet řešení rovnice $x(x + 6) = K$ v závislosti na reálném parametru K.

N3. Načrtněte grafy funkcí $f(x) = x|x + 6|$ a $g(x) = x|x - 6|$.

D1. V oboru reálných čísel x řešte rovnici $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$, kde a je reálný parametr.

D2. Najděte všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic $|x| + y = a$, $2|y| - x = b$ právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete.

D3. V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice $|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$ s neznámou x právě tři různá reálná řešení.

D4. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost $|x^2 + ax + b| \leqq m$ platila pro každé $x \in \langle 0, 2\rangle$.

5. *Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2...A_n$. Bod A_3 zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_2A_4, získáme bod A_3'. Pak bod A_3' zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_1A_3, získáme bod A_3''. Pro která $n \geqq 4$ je bod A_3'' totožný s průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4?* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Připomeňte si *větu o středovém a obvodovém úhlu* a její důkaz.

N2. V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2...A_n$ se středem S vyjádřete v závislosti na čísle $n \geqq 7$ velikosti úhlů A_1SA_2, $A_1A_3A_2$, $A_1A_7A_5$.

N3. Uvažme pravidelný n-úhelník $A_1A_2...A_n$. Dokažte, že obraz vrcholu A_{k-l} v osové souměrnosti podle přímky A_iA_k leží na přímce A_iA_{k+l}, kdykoli i, k, l jsou přirozená čísla splňující $l < k < k + l < i \leqq n$.

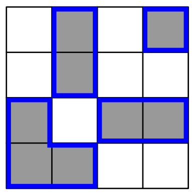
N4. V situaci ze soutěžní úlohy dokažte, že pro každé $n \geqq 5$ leží bod A_3' uvnitř úsečky A_1A_4.

D1. Určete, pro která celá čísla $n \geqq 3$ platí: V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ se středem S půlí úhlopříčka A_1A_3 úsečku A_2S.

D2. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Přímky AB a CE se protínají v bodě P. Určete velikost úhlu PDG.

D3. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$.

D4. Uvažujme pravidelný 18úhelník $A_1A_2...A_{18}$. Ukažte, že obrazec ohraničený úhlopříčkami A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12} a $A_{10}A_{17}$ je obdélník (nikoli čtverec).



6. *Je dána šachovnice $m \times n$, jejíž políčka jsou obarvena černě a bíle klasickým způsobem, přičemž levé horní políčko je černé.* Tahem *rozumíme vzájemnou výměnu dvou řádků nebo vzájemnou výměnu dvou sloupců šachovnice.* Skvrnou *rozumíme takovou neprázdnou množinu černých políček, která je tvořena všemi políčky, do nichž lze z jednoho jejího políčka přejít po cestě sestávající ze stranou sousedících černých políček. Například na obrázku je šachovnice 4×4 s právě čtyřmi skvrnami. V závislosti na přirozených číslech m a n určete, kolik nejméně skvrn může být na šachovnici $m \times n$ po provedení konečného počtu tahů.* (David Hruška)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 1×7.

N2. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 2×2.

N3. V soutěžní úloze pro šachovnici 3×3 ukažte, že její prostřední políčko bude po libovolném počtu tahů tvořit jednoprvkovou skvrnu.

N4. V soutěžní úloze pro obecnou šachovnici $m \times n$ najděte všechny dvojice černých políček, která lze konečným počtem tahů přesunout tak, aby spolu sousedila stranou.

D1. V řadě 2021 černých a bílých políček je první černé a každé další má jinou barvu než to předešlé. Jedním krokem rozumíme vzájemnou výměnu jednoho bílého a jednoho černého políčka, která spolu nemusí sousedit. Jaký nejmenší počet kroků potřebujeme, aby černá políčka vytvořila jednu skvrnu?

D2. Uvažujme šachovnici 8×8 s obvyklým obarvením políček. V jednom kroku můžeme „převrátit“ barvy všech políček jednoho řádku, jednoho sloupce nebo jednoho čtverečku 2×2. Můžeme po konečném počtu kroků dojít k šachovnici s jediným černým políčkem?

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod* $11\,990$. *Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro dané prvočíslo p najděte všechny dvojice celých čísel c a d, pro něž platí $c > d$ a $cd = p^2$. [$(c, d) = (p^2, 1)$ a $(c, d) = (-1, -p^2)$. Protože ± 1, $\pm p$ a $\pm p^2$ jsou jediní dělitelé čísla p^2, rozložit p^2 na součin dvou *různých* celých čísel lze dvěma způsoby: $p^2 = 1 \cdot p^2 = (-1) \cdot (-p^2)$. Úloze tak vyhovují jen dvě výše uvedené dvojice.]

N2. Najděte všechna řešení (p, q) rovnice $p^2 = q^2 - 28q + 52$ v kladných celých číslech taková, že p je prvočíslo. [$(p, q) = (5, 27)$ a $(p, q) = (5, 1)$. Po rozkladu pravé strany rovnice na součin máme $p^2 = (q-2)(q-26)$. Protože pro čísla $c = q-2$ a $d = q-26$ platí $c > d$, jsme v situaci z úlohy N1. Možnosti $q - 2 = p^2 \wedge q - 26 = 1$, resp. $q - 2 = -1 \wedge q - 26 = -p^2$ vedou k výše uvedeným řešením.]

D1. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]

D2. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p+q^2 = q+145p^2$. [55–C–II–4]

D3. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin $(a+b)(b+c)(c+a)$ je roven mocnině některého prvočísla. [Návodná úloha N2 k 69–A–I–6]

D4. Najděte všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$. [60–A–III–2]

2. *Nechť* ABC *je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou* BC. *Uvnitř stran* AB *a* AC *leží po řadě body* D *a* E *tak, že* $|CD| = |CA|$ *a* $|BE| = |BA|$. *Označme* F *takový bod, že* $ABFC$ *je rovnoběžník. Dokažte, že* $|FD| = |FE|$. (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte známé tvrzení: Pokud v konvexním čtyřúhelníku $PQRS$ platí $PQ \parallel RS$ a $|QR| = |PS|$, pak je $PQRS$ buď rovnoběžník, nebo rovnoramenný lichoběžník. [Rozlišme, zda kromě obou podmínek ze zadání platí ještě $|PQ| = |RS|$ či nikoliv. Pokud ano, jsou trojúhelníky PQR a RSP shodné podle věty *sss*, a tak jsou shodné střídavé úhly PRQ a RPS; platí tudíž $QR \parallel PS$, čili $PQRS$ je rovnoběžník. V případě, kdy $|PQ| \neq |RS|$, můžeme s ohledem na symetrii předpokládat, že $|PQ| > |RS|$. Tehdy uvnitř strany PQ zvolíme bod T tak, aby platilo $|PT| = |RS|$. Spolu s $PT \parallel RS$ to pak znamená, že konvexní čtyřúhelník $PTRS$ je rovnoběžník. Z něho a z trojúhelníku TQR vidíme, že $PS \parallel TR \nparallel QR$, takže $PQRS$ je rovnoramenný lichoběžník.]

N2. Uvažme situaci ze soutěžní úlohy. Najděte dva rovnoramenné lichoběžníky s vrcholy v bodech A, B, C, D, E, F. [$BFCD$ a $BFCE$. Plyne to z tvrzení uvedeného v úloze N1.]

N3. Dokažte známé tvrzení o shodnosti úhlopříček každého rovnoramenného lichoběžníku. [Mějme rovnoramenný lichoběžník $PQRS$ s delší základnou PQ a pokračujme v úvahách z řešení úlohy N1: Protože v trojúhelníku TQR máme $|TR| = |QR|$, je úhel RQT shodný s úhlem RTQ, který je rovněž shodný se souhlasným úhlem SPQ. Lichoběžník $PQRS$ tak má shodné oba vnitřní úhly při základně PQ, a proto kýžená rovnost $|PR| = |QS|$ plyne z trojúhelníků PQR a QPS, shodných podle věty *sus*.]

D1. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici. [63–B–I–3]

D2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$. [70–B–I–3]

D3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$. [70–B–II–3]

D4. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý. [67–A–I–5]

D5. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec. [55–A–I–3]

3. *Určete počet devítimístných čísel, v nichž se číslice* $0-9$ *vyskytují nejvýše jednou a v nichž se součty číslic na* 1. *až* 3. *místě, na* 3. *až* 5. *místě, na* 5. *až* 7. *místě a na* 7. *až* 9. *místě všechny rovnají témuž číslu* 10. *Najděte rovněž nejmenší a největší z těchto čísel.* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Součet devíti navzájem různých číslic je 42. Které jsou to číslice? [Všechny kromě trojky. Protože $0+1+2+\ldots+9 = 45$, musí chybět číslice rovná $45-42 = 3$.]

N2. Navzájem různé číslice a, b, c, d splňují rovnost $a+b+c+6 = d$. Které jsou to číslice? [$\{a,b,c\} = \{0,1,2\}$ a $d = 9$. Plyne to z nerovností $a+b+c \geqq 0+1+2 = 3$ a $d \leqq 9$.]

N3. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 1, 3, 5, 7, 9 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Kolik je takových čísel? [24. Číslo se zápisem $\overline{abcde}$, kde $\{a,b,c,d,e\} = \{1,3,5,7,9\}$, je vyhovující, právě když platí $a+b+c = c+d+e$ neboli $a+b = d+e$. Z poslední rovnosti dvou sudých čísel plyne, že součet čísel ve čtyřprvkové množině $\{a,b,d,e\}$ je dělitelný čtyřmi, takže z pěti podmnožin přicházejí v úvahu pouze tři: $\{3,5,7,9\}$, $\{1,3,7,9\}$ a $\{1,3,5,7\}$. Odpovídá jim vždy jediné rozdělení na dvě dvojice se stejným součtem: $3+9 = 5+7$, resp. $1+9 = 3+7$, resp. $1+7 = 3+5$. Každou vyhovující čtveřici (a,b,d,e) tedy určíme tak, že nejprve vybereme jednu z těchto rovností (3 možnosti), pak jednu její stranu přiřadíme množině $\{a,b\}$ a druhou stranu množině $\{d,e\}$ (2 možnosti) a nakonec rozhodneme, který ze dvou přiřazených sčítanců je a a který ze dvou přiřazených sčítanců je d ($2 \cdot 2 = 4$ možnosti). Hledaný počet vyhovujících čísel je tedy $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.]

N4. Pokud bychom v zadání soutěžní úlohy požadovali, aby se uvažované součty číslic rovnaly 9 namísto 10, pak by takové číslo neexistovalo. Dokažte. [Připusťme existenci vyhovujícího čísla se zápisem $\overline{abcdefghi}$, a nezastoupenou číslici označme j. Pak platí

$$\begin{aligned}36 = 4 \cdot 9 &= (a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+g)+(g+h+i) = \\ &= (a+b+c+d+e+f+g+h+i+j)-j+(c+e+g) = \\ &= 45-j+(c+e+g) \geqq 45-9+(0+1+2) = 39,\end{aligned}$$

a to je spor.]

D1. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 0, 1, 3, 5, 8 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Určete číslici na místě stovek takového čísla. [Číslice 1. Pro takové číslo $\overline{abcde}$ se stejně jako v úloze N3 odvodí podmínka $a+b=d+e$. Ukážeme, že to při zadaných číslicích to musí být rovnost typu $0+8=3+5$ („typu“ znamená „až na pořadí sčítanců i obou součtů“). Nejdříve rozhodneme, zda číslice a, b (a tedy číslice d, e) mají stejnou či různou paritu. Protože máme k dispozici dvě sudé číslice 0, 8 a tři liché číslice 1, 3, 5, v případě různých parit číslic v obou dvojicích (a,b) a (d,e) by rovnost $a+b=d+e$ byla typu $0+x=8+y$ s vhodnými číslicemi $x,y \in \{1,3,5\}$, což je zřejmě spor. V obou dvojicích (a,b) a (d,e) jsou tedy číslice téže parity, takže zřejmě to jsou jednou dvě sudé a jednou dvě liché číslice. Rovnost $a+b=d+e$ je tak nutně typu $0+8=x+y$, kde zřejmě $x=3$ a $y=5$. Odtud plyne $\{a,b,d,e\}=\{0,3,5,8\}$. Číslice c na místě stovek tedy nutně musí být „zbylá“ číslice 1. Dodejme, že zkoumané pětimístné číslo skutečně existuje, např. to je 80 135.]

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab}-\overline{cd}=1$. [69–C–I–1]

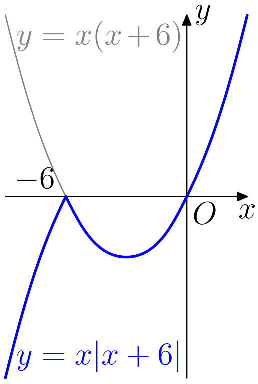
4. *Určete počet reálných kořenů rovnice $x|x+6A|=36$ v závislosti na reálném parametru A.* (Vojtěch Bálint)

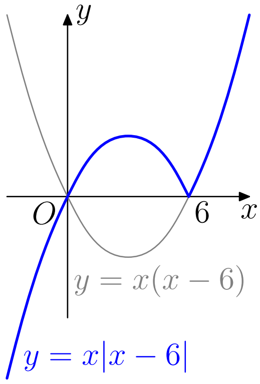
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte minimum funkce $f(x)=x(x+6)$. [$f(-3)=-9$. Kvadratická funkce s kladným koeficientem u x^2, která má dva reálné kořeny, nabývá svého minima přesně uprostřed mezi těmito kořeny, v daném případě mezi body $x=0$ a $x=-6$. Lze také využít identitu $x(x+6)=(x+3)^2-9$.]

N2. Určete počet řešení rovnice $x(x+6)=K$ v závislosti na reálném parametru K. [Grafem kvadratické funkce na levé straně rovnice je parabola. Dle N1 nabývá tato funkce minimální hodnoty -9. Odtud plyne, že rovnice má pro $K=-9$ jedno řešení, pro $K>-9$ dvě řešení a pro $K<-9$ nemá žádné řešení.]

N3. Načrtněte grafy funkcí $f(x) = x|x + 6|$ a $g(x) = x|x - 6|$. [





]

D1. V oboru reálných čísel x řešte rovnici $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$, kde a je reálný parametr. [Jak algebraické, tak geometrické řešení najdete na str. 45–50 brožury O rovnicích s parametry ze Školy mladých matematiků.]

D2. Najděte všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic $|x| + y = a$, $2|y| - x = b$ právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete. [66–B–I–2]

D3. V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice $|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$ s neznámou x právě tři různá reálná řešení. [52–B–I–6]

D4. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost $|x^2 + ax + b| \leqq m$ platila pro každé $x \in \langle 0, 2\rangle$. [65–A–I–2]

5. *Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2...A_n$. Bod A_3 zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_2A_4, získáme bod A_3'. Pak bod A_3' zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_1A_3, získáme bod A_3''. Pro která $n \geqq 4$ je bod A_3'' totožný s průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4?* (Jaroslav Zhouf)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Připomeňte si *větu o středovém a obvodovém úhlu* a její důkaz. [Viz str. 3–4 brožury Kružnice ze Školy mladých matematiků, nebo také komentovaný výklad na `https://www.youtube.com/watch?v=REi-iU55oog`.]

N2. V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2...A_n$ se středem S vyjádřete v závislosti na čísle $n \geqq 7$ velikosti úhlů A_1SA_2, $A_1A_3A_2$, $A_1A_7A_5$. [$|\sphericalangle A_1SA_2| = \frac{360^\circ}{n}$, $|\sphericalangle A_1A_3A_2| = \frac{180^\circ}{n}$ (z věty o středovém a obvodovém úhlu), $|\sphericalangle A_1A_7A_5| = |\sphericalangle A_1A_7A_2| + |\sphericalangle A_2A_7A_3| + |\sphericalangle A_3A_7A_4| + |\sphericalangle A_4A_7A_5| = \frac{720^\circ}{n}$.]

N3. Uvažme pravidelný n-úhelník $A_1A_2...A_n$. Dokažte, že obraz vrcholu A_{k-l} v osové souměrnosti podle přímky A_iA_k leží na přímce A_iA_{k+l}, kdykoli i, k, l jsou přirozená čísla splňující $l < k < k + l < i \leqq n$. [Podobně jako v N2 ukážeme, že $|\sphericalangle A_{k-l}A_iA_k| = \frac{l\cdot 180^\circ}{n} = |\sphericalangle A_kA_iA_{k+l}|$, a jsme hotovi.]

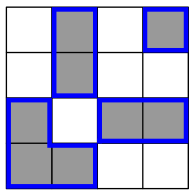
N4. V situaci ze soutěžní úlohy dokažte, že pro každé $n \geqq 5$ leží bod A_3' uvnitř úsečky A_1A_4. [Využijte toho, že polopřímka A_4A_2 je osa úhlu $A_3A_4A_1$ a že $|A_3A_4| < |A_1A_4|$, neboť v trojúhelníku $A_1A_3A_4$ je $|\sphericalangle A_4A_1A_3| < |\sphericalangle A_1A_3A_4|$.]

D1. Určete, pro která celá čísla $n \geqq 3$ platí: V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ se středem S půlí úhlopříčka A_1A_3 úsečku A_2S. [Jediné $n = 6$. $A_1A_2A_3S$ je deltoid, v němž se úhlopříčky navzájem půlí. Je to tedy kosočtverec. Proto $|SA_2| = |SA_1| = |A_1A_2|$, takže SA_1A_2 je rovnostranný trojúhelník, tudíž nutně $n = 6$. Toto n naopak zřejmě vyhovuje, neboť $A_1A_2A_3S$ je tehdy kosočtverec.]

D2. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Přímky AB a CE se protínají v bodě P. Určete velikost úhlu PDG. [90 stupňů. Označme Q průsečík úhlopříček DG a CE. Ze souměrností pravidelného sedmiúhelníku plyne $AB \parallel CG$, $AC \parallel$ $\parallel DG$ a $AG \parallel CE$. Proto $APCG$ a $ACQG$ jsou rovnoběžníky, a tudíž shodné úsečky AG, CD jsou rovněž shodné s úsečkami CP a CQ. Bod C je tak středem úsečky PQ a podle Thaletovy věty je úhel PDQ neboli PDG pravý. (CPSJ, 2021)]

D3. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$. [70–B–I–5]

D4. Uvažujme pravidelný 18úhelník $A_1A_2 \ldots A_{18}$. Ukažte, že obrazec ohraničený úhlopříčkami A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12} a $A_{10}A_{17}$ je obdélník (nikoli čtverec). [$A_2A_7 \parallel$ $\parallel A_{10}A_{17}$ plyne z toho, že $|\sphericalangle A_7A_2A_{10}| = \frac{3}{18} \cdot 180^\circ = |\sphericalangle A_2A_{10}A_{17}|$. Podobně $A_3A_{15} \parallel A_6A_{12}$. Označme X průsečík A_2A_7 s A_6A_{12}. Protože $|\sphericalangle A_2A_7A_6| = \frac{4}{18} \cdot$ $\cdot 180^\circ$ a $|\sphericalangle A_7A_6A_{12}| = \frac{5}{18} \cdot 180^\circ$, plyne z trojúhelníku XA_7A_6, že $|\sphericalangle A_6XA_7| = \frac{9}{18} \cdot$ $\cdot 180^\circ = 90^\circ$, tj. $A_6A_{12} \perp A_2A_7$. Zatímco vzdálenost stran A_6A_{12}, A_3A_{15} je rovna $|A_{12}A_{15}|$ (neboť úsečka $A_{12}A_{15}$ je na obě strany kolmá, protože je rovnoběžná s A_2A_7), tak vzdálenost zbývajících dvou stran je menší než $|A_{12}A_{15}| = |A_7A_{10}|$, protože úsečka A_7A_{10} na ně kolmá není. (Polsko OMJ/OMG, 2010)]



6. *Je dána šachovnice $m \times n$, jejíž políčka jsou obarvena černě a bíle klasickým způsobem, přičemž levé horní políčko je černé.* Tahem *rozumíme vzájemnou výměnu dvou řádků nebo vzájemnou výměnu dvou sloupců šachovnice.* Skvrnou *rozumíme takovou neprázdnou množinu černých políček, která je tvořena všemi políčky, do nichž lze z jednoho jejího políčka přejít po cestě sestávající ze stranou sousedících černých políček. Například na obrázku je šachovnice 4×4 s právě čtyřmi skvrnami. V závislosti na přirozených číslech m a n určete, kolik nejméně skvrn může být na šachovnici $m \times n$ po provedení konečného počtu tahů.* (David Hruška)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 1×7. [Všechna černá pole lze snadno spojit do jedné skvrny.]

N2. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 2×2. [Dvě černá pole budou vždy v protilehlých rozích, vždy tedy budou tvořit dvě skvrny.]

N3. V soutěžní úloze pro šachovnici 3×3 ukažte, že její prostřední políčko bude po libovolném počtu tahů tvořit jednoprvkovou skvrnu. [Prostřední políčko bude vždy ve svém řádku i ve svém sloupci jediným černým políčkem, takže nikdy nebude s žádným jiným černým políčkem stranově sousedit.]

N4. V soutěžní úloze pro obecnou šachovnici $m \times n$ najděte všechny dvojice černých políček, která lze konečným počtem tahů přesunout tak, aby spolu sousedila stranou. [Jde o právě ty dvojice černých políček, která leží v jednom řádku nebo v jednom sloupci. Skutečně, leží-li ve stejném řádku (sloupci), vystačíme s jednou vzájemnou výměnou dvou sloupců (řádků). Leží-li naopak ve dvou různých řádcích i dvou různých sloupcích, tak tento fakt se nezmění po žádném tahu.]

D1. V řadě 2021 černých a bílých políček je první černé a každé další má jinou barvu než to předešlé. Jedním krokem rozumíme vzájemnou výměnu jednoho bílého a jednoho černého políčka, která spolu nemusí sousedit. Jaký nejmenší počet kroků potřebujeme, aby černá políčka vytvořila jednu skvrnu? [505 kroků stačí, černá políčka na lichých pozicích 1013 až 2021 přesuneme na sudé pozice 2 až 1010. Méně nestačí, protože původně je skvrn 1011 a každým krokem se počet skvrn zmenší nejvýš o 2 (nejvýš dvě skvrny se spojí do jedné a nejvýš jedna skvrna zanikne, případné změny ostatních skvrn jejich počet nesnižují).]

D2. Uvažujme šachovnici 8×8 s obvyklým obarvením políček. V jednom kroku můžeme „převrátit“ barvy všech políček jednoho řádku, jednoho sloupce nebo jednoho čtverečku 2×2. Můžeme po konečném počtu kroků dojít k šachovnici s jediným černým políčkem? [Ne. Uvědomte si, že počet černých políček se v každém kroku změní o sudý počet, tedy zůstane sudý po libovolném počtu kroků.]