

Návodné a doplňující úlohy pro kategorii C

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Pro celá čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokažte, že pak pro libovolná celá čísla k, l platí rovněž $n \mid ka + lb$ (speciálně například $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$).

N2. Pro celá čísla n, a, b , kde a, b jsou nesoudělná, platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $ab \mid n$.

N3. Máme vyjít několik schodů. Kdybychom je brali po dvou, jeden zůstane. Kdybychom je brali po třech, také zůstane jeden. Dokažte, že rovněž tak to dopadne, když schody budeme brát po šesti.

Nechť v dalším textu $\text{nsn}(\dots)$ značí nejmenší společný násobek skupiny čísel zapsaných mezi závorkami.

D1. Pro celá čísla n, a, b platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $\text{nsn}(a, b) \mid n$.

D2. Pro celá čísla n, a_1, \dots, a_k platí $a_i \mid n$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, Dokažte, že pak také platí $\text{nsn}(a_1, \dots, a_k) \mid n$.

D3. Je dáno přirozené číslo $m \geq 5$ takové, že číslo $m + 1$ je dělitelné aspoň dvěma prvočísly. Dokažte, že závěr soutěžní úlohy platí všeobecněji: Postupně pro $i = 3, 4, \dots, m$ žáky rozdělujeme do i -tic, vždy jeden žák zbude a toho z další hry vyloučíme. Pak i při následném rozdělování na $(m + 1)$ -tice jeden žák zbude. (Původní úlohu dostaneme volbou $m = 5$).

D4. Dokažte, že pokud bychom v úloze D3 povolili, aby číslo $m + 1$ bylo dělitelné jen jedním prvočíslem, tak závěr obecně neplatí: Existuje takové n , že prvních m rozdělení proběhne se zadaným výsledkem, avšak při následném rozdělování žáků do $(m + 1)$ -tic se nestane, že by zbyl jeden žák.

D5. Najděte největší přirozené číslo d , které má tu vlastnost, že pro libovolné přirozené číslo n je hodnota výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ dělitelná číslem d .

2. Určete všechny čtveřice různých dvojmístných přirozených čísel, pro které zároveň platí:

- (i) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 2, je 80.
 (ii) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 3, je 90.
 (iii) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 5, je 60.

(Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Na tabuli jsou napsána tři dvojmístná (ne nutně různá) čísla taková, že součet těch s číslicí 1 je 36 a součet těch s číslicí 5 je 40. Určete tato tři čísla.
- N2. Na tabuli jsou napsána navzájem různá dvojmístná čísla taková, že každé z nich obsahuje číslici 5 a součet všech je 75. Určete tato čísla (najděte všechny možnosti).
- D1. Na tabuli je napsáno 18 navzájem různých dvojmístných čísel. Součet těch, které obsahují číslici 1, je 593. Určete všechny možné hodnoty součtu těch čísel, které obsahují číslici 2.
- D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla \overline{abcd} s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$.
- D3. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo \overline{abcd} takové, že rozdíl $(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi.
- D4. Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ , přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou.
3. Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC jsou dány body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, uvnitř strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojúhelník vymezený úsečkami AE, GD, BF . Dokažte, že poměr obsahu tohoto trojúhelníku a obsahu trojúhelníku ABC má jedinou možnou hodnotu, a určete ji.

(Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte známou větu o střední příčce trojúhelníku: V trojúhelníku ABC označme M, N po řadě středy stran AB, AC . Pak úsečka MN je rovnoběžná se stranou BC a má oproti ní poloviční délku.
- N2. Dokažte známou větu o střední příčce lichoběžníku: V lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $AB \parallel CD$, označme M, N po řadě středy ramen BC, AD . Pak úsečka MN je rovnoběžná se základnami AB, CD a její délka je rovna aritmetickému průměru obou jejich délek.
- N3. Je dán lichoběžník $ABCD$, pro jehož základny AB a CD platí $|AB| = 2|CD|$. Dokažte, že jeho střední příčka je jeho úhlopříčkami rozdělena na tři stejně dlouhé úseky.
- N4. V trojúhelníku ABC leží bod K na straně AB a bod L na straně AC tak, že $2|AK| = |BK|$ a $2|AL| = |CL|$. Označme P průsečík úseček BL a CK .

Vyjádřete vzdálenost bodu P od přímky BC pomocí vzdálenosti v bodu A od téže přímky BC .

- D1. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Necht E, F, G, H jsou po řadě středy jeho stran AB, BC, CD, DA . Přímky BH a AC se protínají v bodě I , přímky BD a EC v bodě J , přímky AC a DF v bodě K , přímky AG a BD v bodě L . Dokažte, že čtyřúhelník $IJKL$ je rovnoběžník.
- D2. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T . Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části.
- D3. Je dán trojúhelník ABC , v němž D, E jsou po řadě středy stran BC, AB . Necht F je střed úsečky BE a G vnitřní bod strany AC , pro nějž platí $|AG| = 3|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek DF a GE leží na té rovnoběžce s přímkou BC , která prochází bodem A .
- D4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Necht body D a E jsou paty kolmic po řadě z bodů B a C na osu vnějšího úhlu BAC . Označme F průsečík úseček BE a CD . Dokažte, že přímka AF je kolmá na přímkou DE .
4. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven nule a zároveň součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven nule. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Do jednoho řádku je zapsáno 71 čísel. Každé z nich je 1 nebo -1 a přitom součet každých deseti sousedních čísel je roven 0. Dokažte, že první číslo se rovná poslednímu číslu, a určete největší možný součet všech čísel.
- N2. Tabulka 5×4 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém čtverci 2×2 je roven 0. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce.
- N3. Pro která $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček?
- D1. Je možné vyplnit čtvercovou tabulku čísly 1 a -1 tak, aby součet čísel v nějakém sloupci byl sudý a jiném sloupci byl lichý?
- D2. Je možné vyplnit tabulku 10×10 čísly 1 a -1 tak, aby v každém řádku byl součet čísel stejný a v každém sloupci byl jiný?
- D3. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že v aspoň 9 řádcích je součet čísel kladný. a) Dokažte, že v aspoň jednom sloupci je součet čísel kladný. b) Platí stejný závěr i za slabšího předpokladu, že součet čísel je kladný v aspoň 8 řádcích?
- D4. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0.
- D5. Určete, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou obarvena jako pole šachovnice, vyplnit čísly 2 a -1 tak, že současně platí: (i) součet všech čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky je roven 0; (ii) součet čísel na všech černých polích tabulky se rovná součtu čísel na všech jejích bílých polích.
- D6. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 1, 2 a -3 tak, aby součet čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0.

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř jeho strany AB bod D . Na polopřímce opačné k BC uvažme bod E takový, že $|CD| = |DE|$. Dokažte, že platí $|AD| = |BE|$.
(Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. V situaci ze soutěžní úlohy najděte dvě dvojice shodných úhlů velikostí menších než 60° .
- N2. V situaci ze soutěžní úlohy najděte příklad dvou trojúhelníků, označme je KLM a $K'L'M'$, které splňují tyto podmínky: $|LM| = |L'M'|$, $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle K'M'L'|$ a $|\sphericalangle LKM| + |\sphericalangle L'K'M'| = 180^\circ$. Poté dokažte, že z těchto tří obecně zapsaných podmínek plyne rovnost $|KL| = |K'L'|$.
- D1. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC , N střed těžnice AM a P průsečík polopřímky BN se stranou AC . Určete poměr $|AP| : |PC|$.
- D2. V trojúhelníku ABC je bod M středem strany BC . Bod K leží na těžnici AM a platí $|CK| = |AB|$. Bod L je průsečík polopřímky CK se stranou AB . Dokažte, že trojúhelník AKL je rovnoramenný.
- D3. Nechť D , E značí po řadě středy stran AB , BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD . Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF .
- D4. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou BC o středu D označme M střed těžnice AD a P patu kolmice z bodu D na přímku BM . Dokažte, že $AP \perp PC$.
- D5. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, v němž M je pata kolmice z vrcholu D ke straně AB . Průsečík osy úsečky DM s přímkou AC označme K . Dokažte, že úhel AKD je pravý.
6. Určete všechny možné hodnoty součtu $a + b + c + d$, kde a , b , c , d jsou přirozená čísla splňující rovnost

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

(Mária Dományová, Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Pro přirozená čísla a , b , c , d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určete všechny možné hodnoty jejich součtu.
- N2. Pro přirozená čísla a , b , c platí $a(a + b + c) + bc = 143$. Určete všechny možné hodnoty $|b - c|$.
- D1. V každém políčku tabulky 2×2 je napsáno přirozené číslo. Sečteme-li součin čísel v prvním sloupci, součin čísel ve druhém sloupci, součin čísel ve prvním řádku a součin čísel ve druhém řádku, dostaneme výsledek 2021. a) Určete všechny možné hodnoty součtu všech čtyř čísel v tabulce. b) Najděte počet tabulek splňujících zadání, které obsahují čtyři navzájem různá čísla.
- D2. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Ke každému jejímu vrcholu je připsán součin tří čísel na přilehlých stěnách. Součet osmi čísel při vrcholech je 1001. Určete všechny možné hodnoty součtu čísel na stěnách.

- D3. Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c , pro která platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$.
- D4. Na tabuli je napsáno pět (ne nutně různých) prvočísel, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete tato prvočísla.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde. (Josef Tkadlec)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Pro celá čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokažte, že pak pro libovolná celá čísla k, l platí rovněž $n \mid ka + lb$ (speciálně například $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$). [Podmínky $n \mid a$ a $n \mid b$ znamenají existenci celých čísel a', b' takových, že $a = a'n$ a $b = b'n$. Potom $ka + lb = a'nk + b'nl = n(a'k + b'l)$, což znamená, že $n \mid ka + lb$.]
- N2. Pro celá čísla n, a, b , kde a, b jsou nesoudělná, platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $ab \mid n$. [Pro libovolné prvočíslo p označme a_p, b_p, n_p exponenty mocnin prvočísla p v rozkladech čísel a, b, n na prvočinitele. Naším cílem je dokázat nerovnost $a_p + b_p \leq n_p$. To je snadné: díky nesoudělnosti a, b je v součtu $a_p + b_p$ aspoň jeden sčítanec roven nule a přitom podle zadání platí $a_p \leq n_p$ i $b_p \leq n_p$.]
- N3. Máme vyjít několik schodů. Kdybychom je brali po dvou, jeden zůstane. Kdybychom je brali po třech, také zůstane jeden. Dokažte, že rovněž tak to dopadne, když schody budeme brát po šesti. [Nechť n je počet schodů. Podle první podmínky platí $2 \mid n - 1$, podle druhé $3 \mid n - 1$. Jelikož 2 a 3 jsou nesoudělná čísla, podle výsledku úlohy N2 platí rovněž $6 \mid n - 1$, a to je dokazované tvrzení.]
Nechť v dalším textu $\text{nsn}(\dots)$ značí nejmenší společný násobek skupiny čísel zapsaných mezi závorkami.
- D1. Pro celá čísla n, a, b platí $a \mid n$ a $b \mid n$. Dokažte, že pak platí také $\text{nsn}(a, b) \mid n$. [Postupujeme podobně jako v úloze N2: Jsou-li a_p, b_p, n_p příslušné exponenty, pak z nerovností $a_p \leq n_p$ a $b_p \leq n_p$ máme $\max(a_p, b_p) \leq n_p$, kde ovšem $\max(a_p, b_p)$ je zřejmě exponent prvočísla p v rozkladu čísla $\text{nsn}(a, b)$.]
- D2. Pro celá čísla n, a_1, \dots, a_k platí $a_i \mid n$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Dokažte, že pak také platí $\text{nsn}(a_1, \dots, a_k) \mid n$. [Postupujte analogicky jako při řešení úlohy D1.]
- D3. Je dáno přirozené číslo $m \geq 5$ takové, že číslo $m + 1$ je dělitelné aspoň dvěma prvočísly. Dokažte, že závěr soutěžní úlohy platí všeobecněji: Postupně pro $i = 3, 4, \dots, m$ žáky rozdělujeme do i -tic, vždy jeden žák zbude a toho z další hry vyloučíme. Pak i při následném rozdělování na $(m + 1)$ -tice jeden žák zbude. (Původní úlohu dostaneme volbou $m = 5$). [Nechť n je počet žáků. Podmínku, co se stane v i -tém kroku, zapíšeme jako $i \mid n - i + 2$, což je ekvivalentní s $i \mid n + 2$. Podle výsledku úlohy D2 to znamená, že $\text{nsn}(3, 4, \dots, m) \mid n + 2$. Jelikož je číslo $m + 1$ dělitelné aspoň dvěma prvočísly, lze ho zapsat ve tvaru $m + 1 = a \cdot b$ s dvěma nesoudělnými čísly $a \leq m$ a $b \leq m$. Každé z čísel a, b určitě dělí číslo $\text{nsn}(3, 4, \dots, m)$ (i když je $a = 2$ nebo $b = 2$), tedy i číslo $n + 2$. To (podle výsledku N2) znamená, že také platí $m + 1 = ab \mid n + 2$.]
- D4. Dokažte, že pokud bychom v úloze D3 povolili, aby číslo $m + 1$ bylo dělitelné jen jedním prvočíslem, tak závěr obecně neplatí: Existuje takové n , že prvních m rozdělení proběhne se zadaným výsledkem, avšak při následném rozdělování žáků do $(m + 1)$ -tic se nestane, že by zbyl jeden žák. [Využijeme poznatků z řešení úlohy D3. Vyberme $n = \text{nsn}(3, 4, \dots, m) - 2$. Protože zřejmě $n > m - 2$, takže

$n+2-m > 0$, a zároveň pro každé $i = 3, 4, \dots, m$ platí $i \mid \text{nsn}(3, 4, \dots, m) = n+2$, postupná rozdělení do i -tic pro taková i požadovaným způsobem proběhne a rozdělování do $(m+1)$ -tic se poté bude ještě účastnit $n+2-m$ žáků. Je-li ovšem $m+1 = p^k$, kde p je prvočíslo a $k \geq 1$ je celé číslo, pak číslo $n+2 = \text{nsn}(3, 4, \dots, m)$ už nebude dělitelné číslem $m+1$, protože v rozkladu takového čísla $n+2$ se prvočíslo p vyskytuje pouze v mocnině p^{k-1} . Takže rozdělení do $(m+1)$ -tic ve výsledku s jedním zbylým žákem neproběhne.]

D5. Najděte největší přirozené číslo d , které má tu vlastnost, že pro libovolné přirozené číslo n je hodnota výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ dělitelná číslem d . [66-C-I-2]

2. Určete všechny čtveřice různých dvojmístných přirozených čísel, pro které zároveň platí:

- (i) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 2, je 80.
- (ii) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 3, je 90.
- (iii) Součet těch čísel z dané čtveřice, která obsahují číslici 5, je 60.

(Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Na tabuli jsou napsána tři dvojmístná (ne nutně různá) čísla taková, že součet těch s číslicí 1 je 36 a součet těch s číslicí 5 je 40. Určete tato tři čísla. [15, 21, 25. Zaměřme se na zadaný součet 40. Protože toto číslo nemá číslici 5, nemůže to být ani „součet“ jednoho, ani všech tří čísel napsaných čísel, která by musela končit číslicí 5, neboť jsou menší než 50; musí jít tedy o součet dvou čísel končících číslicí 5, tedy nutně čísel 15 a 25. Zbylé třetí číslo musí s číslem 15 dávat zadaný součet 36, takže jde o číslo 21 (které skutečně obsahuje číslici 1).]

N2. Na tabuli jsou napsána navzájem různá dvojmístná čísla taková, že každé z nich obsahuje číslici 5 a součet všech je 75. Určete tato čísla (najděte všechny možnosti). [Buď jedno číslo 75, nebo dvě čísla 50 a 25, nebo tři čísla 15, 25 a 35. Je-li napsané číslo jedno, tak je to samo číslo 75. Jsou-li napsána čísla dvě, tak číslicí 5 může jen jedno číslo začínat a jen jedno končit, máme tedy $75 = 5\star + \star 5$, což je jediné $50 + 25$. Jsou-li napsána aspoň tři čísla, tak součet všech je aspoň $15 + 25 + 35 = 75$; jsou to proto právě tři čísla, a to 15, 25 a 35.]

D1. Na tabuli je napsáno 18 navzájem různých dvojmístných čísel. Součet těch, které obsahují číslici 1, je 593. Určete všechny možné hodnoty součtu těch čísel, které obsahují číslici 2. [Jediná hodnota je 33. Počet všech dvojmístných čísel s číslicí 1 je roven číslu 18 ze zadání úlohy, jsou to totiž čísla 10, 11, ..., 19, 21, 31, ..., 91 a jejich součet je roven právě číslu 593 ze zadání úlohy. Na tabuli jsou tedy všechna tato čísla a žádná jiná. Ta s číslicí 2 jsou právě 12 a 21.]

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla \overline{abcd} s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69-C-I-1]

D3. Najděte nejmenší čtyřmístné číslo \overline{abcd} takové, že rozdíl $(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$ je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi. [67-C-I-1]

D4. Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ , přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou. [70-B-I-1]

3. Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC jsou dány body D, E tak, že $|BD| = |DE| = |EC|$, uvnitř strany AC body F, G tak, že $|AG| = |GF| = |FC|$. Uvažujme trojúhelník vymezený úsečkami AE, GD, BF . Dokažte, že poměr obsahu tohoto trojúhelníku a obsahu trojúhelníku ABC má jedinou možnou hodnotu, a určete ji. (Jaroslav Zhouf)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Dokažte známou větu o střední příčce trojúhelníku: V trojúhelníku ABC označme M, N po řadě středy stran AB, AC . Pak úsečka MN je rovnoběžná se stranou BC a má oproti ní poloviční délku. [Trojúhelníky ABC a AMN jsou podobné s koeficientem $1/2$ (věta *sus*), takže platí $|MN| = |AB|/2$ a úhly ABC, AMN jsou shodné, odkud plyne $MN \parallel BC$.]
- N2. Dokažte známou větu o střední příčce lichoběžníku: V lichoběžníku $ABCD$, ve kterém $AB \parallel CD$, označme M, N po řadě středy ramen BC, AD . Pak úsečka MN je rovnoběžná se základnami AB, CD a její délka je rovna aritmetickému průměru obou jejich délek. [Uvažme střed K střed úhlopříčky AC . Pak MK a NK jsou střední příčky po řadě trojúhelníků ABC a ACD , takže (podle N1) jednak platí $MK \parallel AB \parallel CD \parallel NK$, tudíž bod K leží na úsečce MN rovnoběžné se základnami, jednak platí $|MK| = |AB|/2$ a $|NK| = |CD|/2$, odkud $|MN| = |MK| + |NK| = (|AB| + |CD|)/2$.]
- N3. Je dán lichoběžník $ABCD$, pro jehož základny AB a CD platí $|AB| = 2|CD|$. Dokažte, že jeho střední příčka je jeho úhlopříčkami rozdělena na tři stejně dlouhé úseky. [Zachovejme označení z řešení úlohy N2. Tam jsme ukázali, že střed K úhlopříčky AC je jejím průsečíkem se střední příčkou MN a přitom platí $|MK| : |NK| = (|AB|/2) : (|CD|/2) = |AB| : |CD|$. Analogicky musí platit, že střed L úhlopříčky BD je jejím průsečíkem se střední příčkou NM a přitom $|ML| : |NL| = |CD| : |AB|$. Z podmínky $|AB| = 2|CD|$ tak plyne, že body K, L dělí úsečku MN na tři shodné úseky.]
- N4. V trojúhelníku ABC leží bod K na straně AB a bod L na straně AC tak, že $2|AK| = |BK|$ a $2|AL| = |CL|$. Označme P průsečík úseček BL a CK . Vyjádřete vzdálenost bodu P od přímky BC pomocí vzdálenosti v bodu A od téže přímky BC . [$v/2$. Trojúhelníky ABC a AKL jsou podobné podle věty *sus* s koeficientem $1/3$, takže $|KL| = |BC|/3$, $KL \parallel BC$ a vzdálenost bodu A od přímky KL je $v/3$. Odtud pro neznámé vzdálenosti v_1, v_2 bodu P po řadě od přímek BC a KL plyne $v_1 + v_2 = v - v/3 = 2v/3$. Z podobnosti trojúhelníků BCP a KLP (věta *uu*) získáme pro v_1, v_2 druhou rovnici $v_2/v_1 = |KL|/|BC| = 1/3$. Nyní už snadno vypočítáme $v_1 = v/2$ (a $v_2 = v/6$).]
- D1. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Nechtě E, F, G, H jsou po řadě středy jeho stran AB, BC, CD, DA . Přímky BH a AC se protínají v bodě I , přímky BD a EC v bodě J , přímky AC a DF v bodě K , přímky AG a BD v bodě L . Dokažte, že čtyřúhelník $IJKL$ je rovnoběžník. [Nechtě S je střed rovnoběžníku $ABCD$. Všimněme si, že bod I je těžištěm $\triangle ABD$ a bod K je těžištěm $\triangle BCD$. Proto $|IS| = |SA|/3 = |SC|/3 = |KS|$. Analogicky $|SJ| = |SL|$. Úhlopříčky čtyřúhelníku $IJKL$ se navzájem půlí, takže jde o rovnoběžník. Jiné řešení: Uvažme středovou souměrnost podle středu rovnoběžníku $ABCD$. V ní se H

zobrazí na F a E na G . Průsečík I úseček BH a AC se proto zobrazí na průsečík úseček DF a AC , tedy na K . Analogicky dokážeme, že také J se zobrazí na L . Tím pádem obrazem úsečky IJ je úsečka KL , takže $IJKL$ je skutečně rovnoběžník.]

- D2. Je dán trojúhelník ABC s těžištěm T . Na přímkách AT a BT jsou zvoleny po řadě body E a F tak, že čtyřúhelník $TECF$ je rovnoběžník. Dokažte, že úsečky AC a BC dělí úsečku EF na tři shodné části. [70–C–I–5]
- D3. Je dán trojúhelník ABC , v němž D , E jsou po řadě středy stran BC , AB . Necht F je střed úsečky BE a G vnitřní bod strany AC , pro nějž platí $|AG| = 3|CG|$. Dokažte, že průsečík přímek DF a GE leží na té rovnoběžce s přímkou BC , která prochází bodem A . [Návod. Uvažte dva průsečíky dotyčné rovnoběžky: jednak s přímkou DF , jednak s přímkou GE . Tyto dva průsečíky splynou, pokud budou mít stejnou vzdálenost od bodu A . Řešení: 70–C–II–3.]
- D4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Necht body D a E jsou paty kolmic po řadě z bodů B a C na osu vnějšího úhlu BAC . Označme F průsečík úseček BE a CD . Dokažte, že příčka AF je kolmá na přímkou DE . [Cílem je dokázat $BD \parallel AF$. K tomu stačí ověřit, že pro příčku AF v $\triangle EDB$ platí $|AE| : |AD| = |FE| : |FB|$. Na to použijeme podobnost $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ a poté podobnost $\triangle FEC \sim \triangle FBD$, podle kterých postupně dostaneme $|AE| : |AD| = |CE| : |DB| = |FE| : |FB|$, a tudíž jsme hotovi. (CPSJ 2021)]
4. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven nule a zároveň součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven nule. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce. (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Do jednoho řádku je zapsáno 71 čísel. Každé z nich je 1 nebo -1 a přitom součet každých deseti sousedních čísel je roven 0. Dokažte, že první číslo se rovná poslednímu číslu, a určete největší možný součet všech čísel. [Prvních 70 čísel rozdělíme na 7 desetic se součtem nula. Součet všech čísel je tedy roven poslednímu číslu. Podobně zjistíme, že součet všech čísel je roven prvnímu číslu, když uvážíme rozdělení na 7 desetic posledních 70 čísel. První i poslední číslo se tedy rovnají, a to součtu všech čísel, který je tak nejvýše 1. Příklad 71 čísel $1, -1, 1, \dots, -1, 1$ splňuje podmínku úlohy a jejich celkový součet je roven 1, což je tedy hledaný největší možný součet.]
- N2. Tabulka 5×4 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém čtverci 2×2 je roven 0. Určete největší možný součet všech čísel v tabulce. [Největší možný součet je 4. Danou tabulku 5×4 (o pěti řádcích a čtyřech sloupcích) rozdělme na horní řádek 1×4 a čtyři čtverce 2×2 s nulovými součty vepsaných čísel. Součet všech čísel v tabulce je tedy roven součtu čísel v prvním řádku, takže je nejvýše 4. Součtu rovného 4 dosáhneme, pokud tabulku vyplníme tak, že do prvního, třetího a pátého řádku dáme samé 1, zatímco do druhého a čtvrtého řádku dáme samé -1 .]
- N3. Pro která $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček?

[Pro každé takové d : Pro dané d lze například obarvit políčka, která na obrázku obsahují čísla nejvýše rovna d .

1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

- D1. Je možné vyplnit čtvercovou tabulku čísly 1 a -1 tak, aby součet čísel v nějakém sloupci byl sudý a jiném sloupci byl lichý? [Ne. Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je v každém sloupci n čísel. Je-li a z nich rovno 1, je ostatních $n - a$ rovno -1 , takže součet čísel v tomto sloupci je roven $a - (n - a) = 2a - n$. Toto číslo je sudé, resp. liché, právě když je takové číslo n . Tedy všechny součty čísel v jednotlivých sloupcích mají stejnou paritu. Jiné vysvětlení: Parita součtu čísel v daném sloupci se nezmění, když v něm každé číslo -1 zaměníme číslem 1.]
- D2. Je možné vyplnit tabulku 10×10 čísly 1 a -1 tak, aby v každém řádku byl součet čísel stejný a v každém sloupci byl jiný? [Ano, viz obrázek, ve kterém jsou obarvena políčka s číslem 1.]

- D3. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že v aspoň 9 řádcích je součet čísel kladný. a) Dokažte, že v aspoň jednom sloupci je součet čísel kladný. b) Platí stejný závěr i za slabšího předpokladu, že součet čísel je kladný v aspoň 8 řádcích? [a) Nejmenší možný kladný součet v řádku je 2. Součet všech čísel v tabulce je tedy aspoň $9 \times 2 - 10$, což je kladné číslo. Proto je vyloučeno, aby byl součet čísel v každém sloupci nekladný. b) Závěr neplatí obecně, viz příklad na obrázku, kde jsou obarvena právě políčka s číslem 1.]

- D4. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 2 a -1 tak, aby součet všech čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0. [70–C–I–2]
- D5. Určete, pro která přirozená čísla n lze čtvercovou tabulku $n \times n$, jejíž pole jsou obarvena jako pole šachovnice, vyplnit čísly 2 a -1 tak, že současně platí:
 (i) součet všech čísel v každém řádku i v každém sloupci tabulky je roven 0;
 (ii) součet čísel na všech černých polích tabulky se rovná součtu čísel na všech jejích bílých polích. [70–C–II–2]
- D6. Určete, pro která přirozená čísla n lze tabulku $n \times n$ vyplnit čísly 1, 2 a -3 tak, aby součet čísel v každém řádku i každém sloupci byl roven 0. [Právě pro všechna $n \geq 3$. Vyplňme vyhovujícím způsobem nejdříve první řádek tabulky $n \times n$. To zřejmě není možné pro $n \in \{1, 2\}$; pro $n \in \{3, 4, 5\}$ to je snadné: $(1, 2, -3)$ pro $n = 3$, $(1, 1, 1, -3)$ pro $n = 4$ a $(2, 2, 2, -3, -3)$ pro $n = 5$. Dále z vyhovujícího řádku pro dané n získáme vyhovující řádek pro $n + 3$ připojením trojice čísel $(1, 2, -3)$. První vyhovující řádek tabulky $n \times n$ tak máme sestrojen pro každé $n \geq 3$. Z tohoto prvního řádku při daném n nyní snadno sestrojíme celou vyhovující tabulku $n \times n$, a to tak, že do každého dalšího řádku sestavu čísel z předchozího řádku „cyklicky posuneme“ o 1 místo, podobně jako jsme to udělali v tabulce z řešení úlohy N3. (CPSJ 2019)]
5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř jeho strany AB bod D . Na polopřímce opačné k BC uvažme bod E takový, že $|CD| = |DE|$. Dokažte, že platí $|AD| = |BE|$.
 (Jaroslav Švrček)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. V situaci ze soutěžní úlohy najdete dvě dvojice shodných úhlů velikostí menších než 60° . [Jednu takovou dvojici máme v rovnoramenném trojúhelníku DCE : $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DEC|$. Protože však tyto shodné úhly mají vyjádření $|\sphericalangle DCE| = 60^\circ - |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DEB| = 60^\circ - |\sphericalangle BDE|$ (neboť $|\sphericalangle DBE| = 120^\circ$), je druhou dvojicí $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BDE|$.]
- N2. V situaci ze soutěžní úlohy najdete příklad dvou trojúhelníků, označme je KLM a $K'L'M'$, které splňují tyto podmínky: $|LM| = |L'M'|$, $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle K'M'L'|$ a $|\sphericalangle LKM| + |\sphericalangle L'K'M'| = 180^\circ$. Poté dokažte, že z těchto tří obecně zapsaných podmínek plyne rovnost $|KL| = |K'L'|$. [Příklad ze soutěžní úlohy: $KLM = ADC$ a $K'L'M' = BED$ (plyne z řešení úlohy N1). Důkaz rovnosti $|KL| = |K'L'|$ je triviální v případě, kdy $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle L'K'M'| = 90^\circ$. Dále proto předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $|\sphericalangle L'K'M'| > 90^\circ$. Pak na polopřímce opačné k polopřímce $K'M'$ existuje takový bod K'' , že $|K''L'| = |K'L'|$. Zřejmě platí $|\sphericalangle L'K''M'| = 180^\circ - |\sphericalangle L'K'M'| = |\sphericalangle LKM|$, a tak se trojúhelníky $K''L'M'$ a KLM shodují ve dvou vnitřních úhlech a jedné straně, jsou tedy shodné, odkud už plyne $|KL| = |K''L'|$ neboli $|KL| = |K'L'|$, což jsme měli dokázat. Pro znalce sinové věty dodejme, že tvrzení úlohy je okamžitým důsledkem této věty užitě pro trojúhelníky KLM a $K'L'M'$ s přihlédnutím ke vzorci $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.]
- D1. V trojúhelníku ABC označme M střed strany BC , N střed těžnice AM a P průsečík polopřímky BN se stranou AC . Určete poměr $|AP| : |PC|$. [1 : 2. Uvažme

střed S úsečky PC . Potom MS je střední příčka v $\triangle BCP$, a proto $MS \parallel BP$, tudíž NP je střední příčka v $\triangle AMS$. Proto platí $|AP| = |PS| = |SP|$, odkud už $|AP| : |PC| = 1 : 2$. Jiné řešení: Doplňme trojúhelník ABM na rovnoběžník $ABMB'$ se středem N . Pak P je průsečík úhlopříček lichoběžníku $ABC'B'$, takže trojúhelníky BCP a $B'AP$ jsou podle věty uu podobné, odkud plyne $|AP| : |CP| = |B'A| : |BC| = |BM| : |BC| = 1 : 2$. Jiné řešení: Označme B' obraz bodu B v souměrnosti se středem A a K průsečík polopřímky BN s úsečkou $B'C$. Pak AM je střední příčka v $\triangle B'BC$, takže platí $AM \parallel B'C$. Odtud plyne, že shodné úsečky AN a NM jsou středními příčkami v $\triangle B'BK$, resp. $\triangle KBC$, a proto jsou shodné i odpovídající strany $B'K$ a KC , neboli K je střed BC . Bod P tak je průsečík dvou těžnic CA , BK trojúhelníku $B'BC$, je to tedy jeho těžiště, a proto $|AP| : |PC| = 1 : 2$.

- D2. V trojúhelníku ABC je bod M středem strany BC . Bod K leží na těžnici AM a platí $|CK| = |AB|$. Bod L je průsečík polopřímky CK se stranou AB . Dokažte, že trojúhelník AKL je rovnoramenný. [Doplňme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABA'C$. Pak platí $|CA'| = |AB| = |CK|$, takže CKA' je rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem C , tudíž úhly CKA' a CAK' jsou shodné. Odtud užitím vět o vrcholových a střídavých úhlech už plyne shodnost úhlů LKA a LAK , takže trojúhelník AKL je skutečně rovnoramenný (s hlavním vrcholem L).]
- D3. Nechť D , E značí po řadě středy stran AB , BC trojúhelníku ABC a F je střed úsečky AD . Dokažte, že přímka CD půlí úsečku EF . [68–C–S–3]
- D4. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou BC o středu D označme M střed těžnice AD a P patu kolmice z bodu D na přímku BM . Dokažte, že $AP \perp PC$. [Doplňme trojúhelník ABD na rovnoběžník $ABDB'$ se středem M . S ohledem na $|AB'| = |BD| = |DC|$ je $ADCB'$ pravoúhelník, na jehož kružnici opsané díky pravému úhlu DPB' leží bod P . Proto je pravý také úhel APC , jak jsme měli dokázat.]
- D5. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, v němž M je pata kolmice z vrcholu D ke straně AB . Průsečík osy úsečky DM s přímkou AC označme K . Dokažte, že úhel AKD je pravý. [Uvažme bod A' souměrně sdružený s bodem A vzhledem k průsečíku K . Protože body A a A' mají od osy úsečky DM stejnou vzdálenost, leží bod A' na rovnoběžce s přímkou AB , která prochází vrcholem D . Díky tomu je bod C vnitřním bodem úsečky AA' , takže úhly $A'AB$ a $A'AD$ jsou vlastně úhly CAB , resp. CAD , které oba mají velikost 36° (po snadném výpočtu). Z dokázané shodnosti úhlů $A'AB$, $A'AD$ a ze shodnosti střídavých úhlů $A'AB$, $AA'D$ plyne shodnost úhlů $A'AD$ a $AA'D$, takže $AA'D$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou AA' , jejíž střed je právě bod K . Úhel AKD je tudíž skutečně pravý.]

6. Určete všechny možné hodnoty součtu $a + b + c + d$, kde a, b, c, d jsou přirozená čísla splňující rovnost

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

(Mária Dományová, Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

- N1. Pro přirozená čísla a, b, c, d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určete všechny možné hodnoty jejich součtu. [Jediná hodnota 18. Platí $ab + bc + cd + da = b(a + c) + d(a + c) = (a + c)(b + d)$. Protože $77 = 7 \cdot 11$, $a + c > 1$, $b + d > 1$, tak nutně $\{a + c, b + d\} = \{7, 11\}$, tudíž $a + b + c + d = 18$, přitom čtveřice $(a, b, c, d) = (1, 1, 6, 10)$ vyhovuje zadání.]
- N2. Pro přirozená čísla a, b, c platí $a(a + b + c) + bc = 143$. Určete všechny možné hodnoty $|b - c|$. [Jediná hodnota 2. Roznásobením levé strany rovnice dostaneme $a^2 + ab + ac + bc$, což můžeme postupným vytýkáním upravit takto: $a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(a + c)$. Platí $143 = 11 \cdot 13$, $a + b > 1$ a $a + c > 1$, tak nutně $\{a + b, a + c\} = \{11, 13\}$, odkud $|b - c| = |(a + b) - (a + c)| = |11 - 13| = 2$, přitom trojice $(a, b, c) = (1, 10, 12)$ vyhovuje zadání.]
- D1. V každém políčku tabulky 2×2 je napsáno přirozené číslo. Sečteme-li součin čísel v prvním sloupci, součin čísel ve druhém sloupci, součin čísel ve prvním řádku a součin čísel ve druhém řádku, dostaneme výsledek 2021. a) Určete všechny možné hodnoty součtu všech čtyř čísel v tabulce. b) Najděte počet tabulek splňujících zadání, které obsahují čtyři navzájem různá čísla. [a) Jediná hodnota 90, b) 3 528. a) Čísla v tabulce lze označit a, b, c, d tak, že $ab + cd + ac + bd = (a + d)(b + c) = 2021 = 43 \cdot 47$. Odtud plyne $\{a + d, b + c\} = \{43, 47\}$, takže nutně $a + b + c + d = 43 + 47 = 90$. b) Podle řešení a) rozlišíme dva případy: $a + d = 43$ a $b + c = 47$, resp. $a + d = 47$ a $b + c = 43$. V prvním případě lze dvojici (a, d) zvolit právě 42 způsoby a dvojici (b, c) právě 46 způsoby, ve druhém případě jsou tyto počty naopak. Dohromady tak existuje $2 \cdot 42 \cdot 46$ různých vyhovujících tabulek, ovšem včetně těch, ve kterých se některá dvě čísla rovnají. Jejich počet potřebujeme zjistit, abychom ho pak mohli od celkového počtu odečíst. Protože 43 a 47 jsou lichá čísla, tak v každé vyhovující tabulce platí $a \neq d$ a $b \neq c$. V každé tabulce se stejnými čísly proto musí platit aspoň jedna z rovností $a = b$, $a = c$, $d = b$, $d = c$, přitom díky $a + d \neq b + c$ to bude právě jedna z nich (vylučte dvě rovnosti rozbořením všech možností jejich výběru). Jednotlivé z těchto čtyř rovností vždy splňuje 42 vyhovujících tabulek v každém ze dvou rozlišených případů, takže jejich celkový počet je $2 \cdot 4 \cdot 42 = 8 \cdot 42$. Hledaný počet je proto $2 \cdot 42 \cdot 46 - 8 \cdot 42 = 3\,528$. (CPSJ 2021)]
- D2. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Ke každému jejímu vrcholu je připsán součin tří čísel na přilehlých stěnách. Součet osmi čísel při vrcholech je 1001. Určete všechny možné hodnoty součtu čísel na stěnách. [31. Je-li (a, b) dvojice čísel na přední a zadní stěně, (c, d) dvojice čísel na horní a dolní stěně, konečně (e, f) dvojice čísel na levé a pravé stěně, pak roznásobením součinu $(a + b)(c + d)(e + f)$ dostaneme osm sčítanců, kterými jsou právě čísla připsaná vrcholům krychle (v každém vrcholu se stýkají tři stěny, po jedné z popsanych tří dvojic stěn). Platí tedy $(a + b)(c + d)(e + f) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, odkud nutně $\{a + b, c + d, e + f\} = \{7, 11, 13\}$, takže $a + b + c + d + e + f = 7 + 11 + 13 = 31$.]
- D3. Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c , pro která platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$. [Návod. Přičtěte k oběma stranám rovnice číslo 1, abyste pak levou stranu mohli rozložit na součin dvou činitelů. Řešení: 67-B-I-4.]

D4. Na tabuli je napsáno pět (ne nutně různých) prvočísel, jejichž součin je 105krát větší než jejich součet. Určete tato prvočísla. [Část a) úlohy 70–A–I–1.]