71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

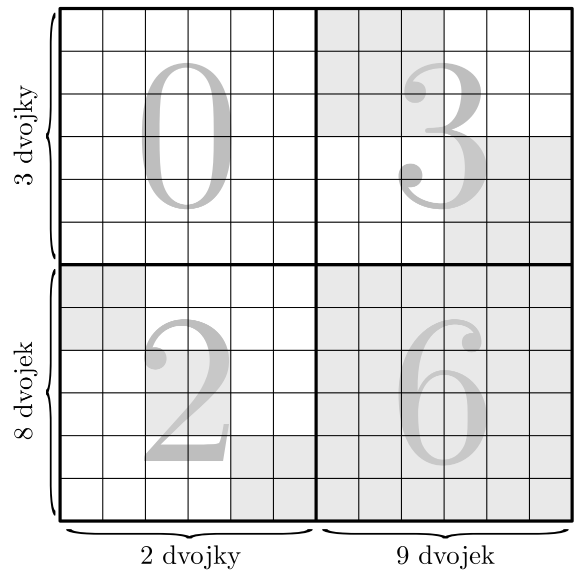
Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *Je možné vyplnit tabulku $n\times n$ jedničkami a dvojkami tak, aby byl součet čísel v každém řádku dělitelný pěti a součet čísel v každém sloupci dělitelný sedmi? Řešte a) pro $n=9$, b) pro $n=12$.* (Tomáš Bárta)

Řešení. a) Dokážeme sporem, že žádné takové vyplnění neexistuje. Připusťme opak a uvažme nějaké vyhovující vyplnění tabulky 9×9. Zaměřme se na její libovolný sloupec. Součet čísel v tomto sloupci je alespoň $9\cdot 1=9$ a nejvýše $9\cdot 2=18$. Jelikož je to dle předpokladu násobek sedmi, musí být roven číslu $2\cdot 7=14$ (neboť $1\cdot 7=7<9$ a $3\cdot 7=21>18$). Součet čísel v celé tabulce je proto roven $9\cdot 14=126$. Protože je v každém řádku součet čísel dělitelný pěti, musí být dělitelný pěti i součet čísel v celé tabulce. Jelikož však číslo $126=5\cdot 25+1$ pěti dělitelné není, dosáhli jsme kýženého sporu.

b) Ano, takové vyplnění existuje. Jeden z možných příkladů je uveden na obrázku vlevo.

1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2



Takto zapsané řešení je úplné, pro inspiraci ale ještě popíšeme jeden možný způsob, jak na takový příklad přijít.

Uvažme prozatím libovolné vyhovující vyplnění tabulky 12×12. V každém řádku je součet čísel alespoň 12, nejvýše 24 a současně je dělitelný pěti. Je tedy roven 15 nebo 20, což odpovídá zastoupení tří nebo osmi dvojek. Podobně součet čísel v každém sloupci patří do téhož rozmezí 12–24 a současně je dělitelný sedmi. Je tedy roven 14 nebo 21, což odpovídá zastoupení dvou nebo devíti dvojek.

Označme r počet řádků se třemi dvojkami a s počet sloupců se dvěma dvojkami. Pak celkový počet D dvojek v tabulce můžeme vyjádřit dvěma způsoby jako

$$r\cdot 3+(12-r)\cdot 8=D=s\cdot 2+(12-s)\cdot 9,$$

což po úpravě přejde na rovnici $7s - 5r = 12$. Jejím řešením (jediným s ohledem na podmínky $r, s \in \{0, 1, \ldots, 12\}$) je dvojice $r = 6$, $s = 6$. Chceme tedy tabulku vyplnit tak, aby v jedné polovině řádků byly 3 dvojky, v druhé polovině jich bylo 8, v jedné polovině sloupců byly 2 dvojky a ve druhé 9, jak je vyznačeno podél okrajů tabulky na obrázku vpravo (na pořadí řádků a sloupců zřejmě nezáleží).

Nabízí se pomyslně rozdělit celou tabulku 12×12 na čtyři podtabulky 6×6 a každou z nich vyplnit tak, aby v každém řádku i sloupci obsahovala stejný počet dvojek. Jednou možností je, aby tyto počty dvojek (velké číslice na obrázku) byly rovny 0, 3, 2 a 6 (s ohledem na to, že počty musejí být v rozmezí 0–6, je to dokonce opět jediná možnost). Stačí tedy vyplnit jednu podtabulku celou jedničkami, jednu celou dvojkami a zbylé dvě například jako na obrázku.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Lze tabulku 5×5 vyplnit celými čísly tak, aby součet čísel v každém řádku byl lichý a součet čísel v každém sloupci sudý? [Nelze. Pro spor předpokládejme opak a označme S součet čísel v celé tabulce. Sčítáním přes řádky je S rovno součtu pěti lichých čísel, tedy je liché. Sčítáním přes sloupce je S rovno součtu sudých čísel, tedy je sudé.]

N2. Pro která $n \leqq 8$ lze tabulku $n \times n$ vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze? [Pouze pro $n = 5$ a $n = 7$. V případě $n \leqq 6$ je součet čísel v každém sloupci nejvýše 12, takže kvůli dělitelnosti 7 musí být roven 7. Součet čísel v celé tabulce proto musí být roven $7n$, podle součtů čísel v řádcích to však musí být násobek pěti, takže nutně $n = 5$. Příklad pro $n = 5$: tři řádky vyplníme jedničkami, dva řádky dvojkami. Příklad pro $n = 7$: čtyři sloupce vyplníme jedničkami, tři sloupce dvojkami. V případě $n = 8$ je součet čísel v každém sloupci v rozmezí 8–16, takže kvůli dělitelnosti sedmi musí být roven 14. Součet všech čísel v tabulce je pak $8 \cdot 14$, což není násobek pěti, takže takový není ani součet čísel v některém řádku.]

N3. Pro která $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je možné vybarvit několik políček tabulky 6×6 tak, aby v každém řádku i každém sloupci bylo právě d vybarvených políček? [Pro každé takové d: Pro dané d lze například obarvit políčka, která na obrázku obsahují čísla nejvýše rovna d.

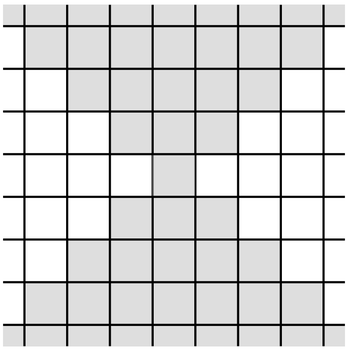
1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5
5	6	1	2	3	4
4	5	6	1	2	3
3	4	5	6	1	2
2	3	4	5	6	1

]

D1. Udejte příklad vyplnění tabulky 71×71, které vyhovuje zadání soutěžní úlohy. [Protože číslo $140 = 69 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ je násobkem pěti i násobkem sedmi, vyhovuje každé vyplnění, kdy je v každém řádku i sloupci 69 dvojek a 2 jedničky. K tomu stačí tabulku vyplnit „cyklicky“: do prvního řádku napsat $(1, 1, 2, 2 \ldots, 2)$, do druhého $(2, 1, 1, 2, 2, \ldots, 2)$ atd., až do posledního 71. řádku $(1, 2, 2, \ldots, 2, 1)$.]

D2. Dokažte, že tabulku $n \times n$ lze vyplnit způsobem popsaným v soutěžní úloze pro každé $n \geqq 18$. [Podmínka $n \geqq 18$ zaručuje existenci celého čísla s, které je násobkem 35 a splňuje nerovnosti $n \leqq s \leqq 2n$. Součet čísel v každém řádku i sloupci tabulky $n \times n$ bude roven určenému číslu s, pokud v každém řádku i sloupci bude $2n - s$ jedniček a $s - n$ dvojek. Dosáhneme toho podobně jako v řešení úlohy D1, když řádky tabulky postupně vyplníme „cyklickými“ změnami požadované sestavy jedniček a dvojek.]

D3. Je možné obarvit políčka nekonečné čtvercové sítě černě a bíle tak, aby v každém řádku bylo jen konečně mnoho políček černých a v každém sloupci jen konečně mnoho políček bílých? [Ano, například jako na obrázku:

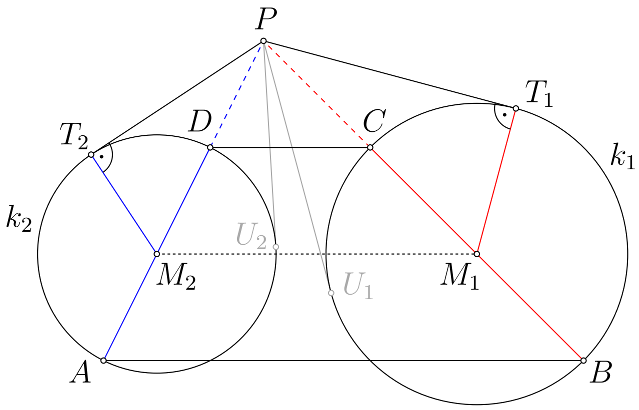


]

2. *Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme k_1 a k_2 kružnice s průměry BC a AD. Dále označme P průsečík přímek BC a AD. Dokažte, že tečny z bodu P ke kružnici k_1 svírají stejný úhel jako tečny z bodu P ke kružnici k_2.*

(Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Středy M_1, M_2 zadaných kružnic k_1, resp. k_2 jsou středy ramen BC, resp. AD – viz obrázek. Jsou na něm označeny i body dotyku T_1, U_1, resp. T_2, U_2 posuzovaných tečen z bodu P.



Naším úkolem je dokázat rovnost $|\sphericalangle T_1PU_1| = |\sphericalangle T_2PU_2|$. Jelikož dvě tečny vedené z jednoho bodu bodu k téže kružnici jsou souměrně sdružené podle spojnice tohoto bodu se středem kružnice,* platí $|\sphericalangle T_1PU_1| = 2|\sphericalangle T_1PM_1|$ a $|\sphericalangle T_2PU_2| = 2|\sphericalangle T_2PM_2|$. Proto nám stačí dokázat shodnost úhlů T_1PM_1 a T_2PM_2. Tu získáme z podobnosti dvou pravoúhlých trojúhelníků podle věty *Ssu*, když ověříme rovnost dvou poměrů $|PM_1| : |M_1T_1|$ a $|PM_2| : |M_2T_2|$.

Předně M_1T_1, M_1B jsou shodné poloměry kružnice k_1 a podobně M_2T_2, M_2A jsou shodné poloměry kružnice k_2. Navíc podle známé vlastnosti střední příčky lichoběžníku** v naší situaci máme $M_2M_1 \parallel AB$, tudíž trojúhelníky PM_2M_1 a PAB jsou podobné podle věty *uu*, a proto platí $|PM_1| : |PB| = |PM_2| : |PA|$, a tedy také $|PM_1| : |M_1B| = |PM_2| : |M_2A|$.*** Spojením těchto dvou pozorování už získáme, co jsme potřebovali k dokončení našeho řešení:

$$\frac{|PM_1|}{|M_1T_1|} = \frac{|PM_1|}{|M_1B|} = \frac{|PM_2|}{|M_2A|} = \frac{|PM_2|}{|M_2T_2|}.$$

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že tečny vedené z bodu A ke kružnici k se středem O jsou souměrně sdružené podle přímky OA. [Stačí dokázat, že souměrně sdružené jsou body dotyku T_1, T_2 uvažovaných tečen. Jsou to však průsečíky dané kružnice k s Thaletovou kružnicí nad průměrem OA a obě tyto kružnice jsou podle přímky OA souměrné. Jinak rovněž stačí ověřit shodnost trojúhelníků T_1OA a T_2OA podle věty *Ssu*.]

* Viz návodnou úlohu 1.

** Viz návodnou úlohu 2.

*** V posledním kroku jsme uplatnili užitečné pravidlo: $a/(a+c) = b/(b+d) \Rightarrow a/c = b/d$. Ověřte, že platí pro libovolné kladné hodnoty a, b, c, d.

N2. Dokažte, že v libovolném lichoběžníku je spojnice středů jeho ramen rovnoběžná s jeho základnami. [Rozdělme daný lichoběžník jednou jeho úhlopříčkou na dva trojúhelníky a uvažme jejich střední příčky rovnoběžné se základnami lichoběžníku. Odtud užitím známých vlastností trojúhelníkových příček plyne, že spojnice středů ramen lichoběžníku je nejen rovnoběžná s jeho základnami, ale navíc má délku rovnou aritmetickému průměru jejich délek.]

D1. Úhlopříčky lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD se protínají v bodě P a přímky AD, BC v bodě Q. Dokažte, že středy základen AB, CD leží na přímce PQ. [Bod P je vnitřním středem stejnolehlosti úseček AB a CD, bod Q je vnějším středem jejich stejnolehlosti. V obou stejnolehlostech si středy úseček AB, CD odpovídají, takže leží se středy stejnolehlostí P, Q na téže přímce.]

D2. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD označme P průsečík os vnějších úhlů u vrcholů A, D a podobně Q průsečík os vnějších úhlů u vrcholů B, C. Dokažte, že délka úsečky PQ je rovna polovině obvodu $ABCD$. [Jelikož body P, Q leží na osách dvou úhlů, jsou to středy kružnic dotýkajících se přímek AB, CD a po řadě ramen AD, BC. Body P, Q proto leží na ose pásu mezi rovnoběžkami AB a CD, která prochází středy M, N ramen AD, BC. Snadno dopočítáme, že $|\sphericalangle APD| = 90° = |\sphericalangle BQC|$, takže body P, Q leží na kružnicích s průměry AD, BC. Při obvyklém označení délek stran $ABCD$ tak platí

$$|PQ| = |PM| + |MN| + |NQ| = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$ (Mexiko 1999)]

D3. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ takový, že trojúhelníky ABC, BCD, CDE, DEA mají všechny shodný obsah. Úsečky AC, AD protnou úsečku BE postupně v bodech M, N. Dokažte, že $|BM| = |NE|$. [Z rovnosti obsahů BCD a CDE plyne $BE \parallel CD$. Podobně dokážeme $BC \parallel AD$ a $DE \parallel AC$, takže trojúhelníky BCM a NDE jsou podobné (uu). Jelikož $BE \parallel CD$, výšky těchto dvou trojúhelníků z vrcholů C, D jsou shodné, takže jde o dva shodné trojúhelníky, a proto $|BM| = |NE|$. (Jižní Afrika 2003)]

D4. V tečnovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme P průsečík polopřímek AD a BC, dále Q průsečík polopřímek BA a CD a konečně R kolmý průmět bodu D na přímku PQ. Dokažte, že kružnice vepsané trojúhelníkům ADQ a CDP jsou z bodu R vidět pod stejným úhlem. [Označme I, J středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ADQ, CDP a r_i, r_j jejich poloměry. Díky podobným trojúhelníkům stačí dokázat rovnost $|RI|/|RJ| = r_i/r_j$. Dále označme K střed a r poloměr kružnice vepsané čtyřúhelníku $ABCD$ a E průsečík přímek IJ a PQ. Body K, I leží na ose úhlu BQC tak, že $|QK|/|QI| = r/r_i$. Podobně body K, J leží na ose úhlu APB tak, že $|PK|/|PJ| = r/r_j$. Po dosazení za druhý a třetí zlomek v rovnosti

$$\frac{|EI|}{|EJ|} \cdot \frac{|PJ|}{|PK|} \cdot \frac{|QK|}{|QI|} = 1$$

(Menelaova věta pro trojúhelník IJK) vychází $|EI|/|EJ| = r_i/r_j$. Zároveň zřejmě platí i $|DI|/|DJ| = r_i/r_j$. Kružnice s průměrem DE je tedy Apolloniovou kružnicí pro body I, J a poměr r_i/r_j. Jelikož $|\sphericalangle DRE| = 90°$, bod R leží na této kružnici, a tak platí $|RI|/|RJ| = r_i/r_j$, jak jsme chtěli dokázat. (Rusko 2008)]

3. *Najděte všechna celá čísla $n > 2$ taková, že číslo n^{n-2} je n-tá mocnina celého čísla.*
(Patrik Bak)

Řešení. Ukážeme, že vyhovuje jedině $n = 4$. Pro stručnost budeme budeme v celém řešení psát „n-tá mocnina“ namísto „n-tá mocnina celého čísla“.

Platí, že kladné celé číslo je n-tou mocninou právě tehdy, když se v jeho rozkladu na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnině, která je násobkem čísla n. Jsou-li proto dvě celá čísla obě n-tými mocninami a jejich podíl je celé číslo, musí být n-tou mocninou i tento podíl. Použitím tohoto tvrzení na n-té mocniny n^n a n^{n-2} (viz zadání úlohy) dostáváme, že rovněž číslo $n^n/n^{n-2} = n^2$ je n-tou mocninou.

Níže dokážeme, že pro každé celé $n \geqq 5$ platí nerovnosti $1^n < n^2 < 2^n$, takže pro žádné takové n nemůže číslo n^2 být n-tou mocninou – muselo by totiž jít o n-tou mocninu se základem ležícím mezi čísly 1 a 2. Každé n vyhovující zadání úlohy tak nutně splňuje nerovnost $n < 5$. Pro zbylé kandidáty $n \in \{3, 4\}$ číslo n^{n-2} otestujeme přímo: pro $n = 3$ vyjde $3^{3-2} = 3$, což není třetí mocnina, zatímco pro $n = 4$ vyjde $4^{4-2} = 16 = 2^4$, což tedy požadovaná čtvrtá mocnina skutečně je.

Zbývá dokázat (ostré) nerovnosti $1^n < n^2 < 2^n$ pro každé celé $n \geqq 5$. Ta první je zřejmá (dokonce pro každé $n > 1$). Důkaz té druhé provedeme matematickou indukcí.

1. Pro $n = 5$ nerovnost skutečně platí: $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.
2. Předpokládejme, že pro nějaké $n \geqq 5$ platí $n^2 < 2^n$, a dokazujme, že pak také platí $(n+1)^2 < 2^{n+1}$. Z předpokládané nerovnosti $n^2 < 2^n$ po vynásobení obou stran číslem 2 dostaneme $2n^2 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, takže kýžená nerovnost $(n+1)^2 < 2^{n+1}$ bude dokázána, pokud ukážeme, že $(n+1)^2 < 2n^2$ neboli $2n^2 - (n+1)^2 > 0$. To je však snadné, dokonce pro každé $n \geqq 3$ máme

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = n(n-2) - 1 \geqq 3 \cdot 1 - 1 = 2 > 0.$$

Důkaz indukcí je ukončen.*

Poznámka. V první části řešení můžeme postupovat s malou obměnou bez úvahy o čísle n^2, když zapíšeme rovnici $n^{n-2} = k^n$ s neznámými celými čísly $n > 2$ a $k > 1$. V případě lichého n jsou exponenty $n-2$ a n nesoudělná čísla, a tak z úvahy o prvočinitelích plyne, že samo číslo n je n-tá mocnina, což dále vyloučíme nerovností $n < 2^n$. V případě sudého n z upravené rovnice $n^{\frac{n}{2}-1} = k^{\frac{n}{2}}$ opět díky nesoudělnosti zastoupených exponentů vyplývá, že číslo n je $\frac{n}{2}$-tou mocninou, což pro $n > 4$ dále vyloučíme nerovností $n < 2^{\frac{n}{2}}$, která je ekvivalentní s nerovností $n^2 < 2^n$ z podaného řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Najděte nejmenší kladné celé číslo n takové, že $75 \cdot n$ je třetí mocnina celého čísla. [Celé číslo je třetí mocninou, právě když se v jeho rozkladu na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnině, která je násobkem tří. Jelikož $75 = 3 \cdot 5^2$, hledané nejmenší n je rovno $3^2 \cdot 5 = 45$.]

* Z našeho postupu vidíme, že implikace z indukčního kroku 2. platí dokonce pro každé $n \geqq 3$. Dokazovaná nerovnost $n^2 < 2^n$ však neplatí ani pro $n = 3$, ani pro $n = 4$, takže v indukčním kroku 1. jsme museli zvolit až $n = 5$.

N2. Uvažme celé $k \geqq 2$. Dokažte, že pokud v rovnosti $a \cdot b = c$ jsou dvě ze tří zastoupených kladných celých čísel a, b, c rovna k-tým mocninám celých čísel, je takové i číslo třetí. [Vyjdeme z poznatku, že celé číslo je k-tou mocninou, právě když se v jeho rozkladu na prvočinitele vyskytuje každé prvočíslo v mocnině, která je násobkem čísla k. V naší situaci pro libovolné prvočíslo p označme α, β, γ (nezáporné) počty zastoupení tohoto p v rozkladech na prvočinitele po řadě čísel a, b, c. Pak rovnost $a \cdot b = c$ znamená $\alpha + \beta = \gamma$, takže dokazované tvrzení plyne ze zřejmé poučky: jsou-li dvě z takových čísel α, β, γ dělitelná daným číslem k, je takové i číslo třetí.]

N3. Dokažte, že pro všechna dostatečně velká kladná celá čísla n platí:
a) $n^2 > 10n + 100$, b) $2^n > 10n^2$, c) $3^n > 10 \cdot 2^n$. [a) Je-li $n > 20$, zřejmě platí $n^2 - 10n - 100 = n(n-10) - 100 > 20 \cdot 10 - 100 > 0$. b) Pro $n = 10$ platí $2^{10} = 1024 > 1000 = 10 \cdot 10^2$. Navíc pokud dokazovaná nerovnost platí pro nějaké $n \geqq 10$, pak platí i pro $n+1$: Skutečně, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 10n^2 \geqq 10(n+1)^2$, kde poslední nerovnost platí, protože je ekvivalentní s nerovností $n(n-2) \geqq 1$, zřejmě platnou dokonce pro každé $n \geqq 3$. c) I když i zde je důkaz indukcí snadný, ukažme, jak se obejít bez ní: Nerovnost přepsaná ve tvaru $(\frac{3}{2})^n > 10$ je splněna (s ohledem na $\frac{3}{2} > 1$ a odtud plynoucí fakt, že funkce $y = (\frac{3}{2})^x$ je rostoucí), právě když platí $n > \log_{\frac{3}{2}}(10) \doteq 5{,}68$.]

D1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla n, k větší než 1 je číslo $\sqrt[k]{n}$ buďto celé, nebo iracionální. [Předpokládejme, že číslo $\sqrt[k]{n}$ je racionální, takže $\sqrt[k]{n} = u/v$, kde u a v jsou celá kladná čísla. Pak platí rovnost $n \cdot v^k = u^k$ a z výsledku úlohy N2 plyne, že rovněž číslo n je k-tou mocninou celého čísla, tj. číslo $\sqrt[k]{n}$ je celé.]

D2. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která je $n^2 + n - 11$ druhou mocninou celého čísla. [Snadno ověříme, že pro $n > 11$ platí $n^2 < n^2 + n - 11 < (n+1)^2$. Stačí tedy probrat $n \leqq 11$. Vyhovují $n \in \{3, 4, 11\}$.]

D3. Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b, pro něž platí $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$. [59–A–III–1]

D4. Pro které dvojice celých čísel x a y platí $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$? [Shortlist IMO 2006, Problem N1. (IMO 2006)]

4. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} xy+1&=z^2,\\ yz+2&=x^2,\\ zx+3&=y^2. \end{aligned}$$

(Tomáš Jurík)

Řešení. Odečtením druhé rovnice od první a drobnou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} y(x-z)-1&=(z-x)(z+x),\\ -1&=(z-x)(z+x+y). \end{aligned}$$

Obdobnou úpravou rozdílu druhé a třetí rovnice získáme

$$\begin{aligned} z(y-x)-1&=(x-y)(x+y),\\ -1&=(x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

Z kterékoliv z obou získaných rovnic plyne $x+y+z\neq 0$, takže je můžeme obě výrazem $x+y+z$ vydělit a pak jejich porovnáním dostat

$$z-x=\frac{-1}{x+y+z}=x-y.$$

Označme $d=z-x=x-y$. Pak $z=x+d$ a $y=x-d$, takže všechna řešení původní soustavy jsou tvaru $(x,y,z)=(x,x-d,x+d)$. Dosaďme taková y a z do jednotlivých rovnic.

Dosazením do druhé rovnice získáme

$$(x-d)(x+d)+2=x^2\quad\text{neboli}\quad d^2=2,\quad\text{tj.}\quad d=\pm\sqrt{2}.$$

Dosazení do první a třetí rovnice s následným využitím výsledku $d^2=2$ zapíšeme do dvou sloupců vedle sebe:

$$\begin{aligned} x(x-d)+1&=(x+d)^2, & (x+d)x+3&=(x-d)^2,\\ 1&=d^2+3xd, & 3xd&=d^2-3,\\ 3xd&=-1. & 3xd&=-1. \end{aligned}$$

Pro $d=+\sqrt{2}$ tak vyjde $x=-\frac{1}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{6}\sqrt{2}$ a pro $d=-\sqrt{2}$ vyjde $x=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{2}$. Dopočtením hodnot $y=x-d$, $z=x+d$ získáme (jediná) dvě řešení úlohy, kterými jsou trojice

$$(x,y,z)\in\left\{\left(-\frac{1\sqrt{2}}{6},-\frac{7\sqrt{2}}{6},\frac{5\sqrt{2}}{6}\right),\left(\frac{1\sqrt{2}}{6},\frac{7\sqrt{2}}{6},-\frac{5\sqrt{2}}{6}\right)\right\}.$$

Dodejme, že při našem postupu zkouška nutná není, protože jsme pro odvozené trojice $(x,x-d,x+d)$ způsobem určení hodnot x, d zaručili splnění všech tří původních rovnic.

Poznámka. Stejného mezivýsledku $(x,y,z)=(x,x-d,x+d)$ lze rovněž dosáhnout porovnáním dvou rozdílů jiných dvojic rovnic. Tak například porovnáním rovností $-1=(x-y)(x+y+z)$ a $-2=(z-y)(x+y+z)$ vyjde $z-y=2(x-y)$.

Jiné řešení. Vynásobíme-li tři zadané rovnice po řadě čísly x, y, z a všechny je pak sečteme, smíšené členy třetího stupně se ve výsledném součtu navzájem zruší:

$$\begin{gathered}x(xy+1)+y(yz+2)+z(zx+3)=x\cdot z^2+y\cdot x^2+z\cdot y^2,\\ x+2y+3z=0.\end{gathered}$$

Totéž se stane, pokud zadané rovnice vynásobíme po řadě čísly y, z, x:

$$\begin{gathered}y(xy+1)+z(yz+2)+x(zx+3)=y\cdot z^2+z\cdot x^2+x\cdot y^2,\\ 3x+y+2z=0.\end{gathered}$$

Vidíme, že každé řešení původní soustavy je nutně řešením soustavy dvou lineárních rovnic (o třech neznámých)

$$\begin{aligned}x+2y+3z&=0,\\ 3x+y+2z&=0.\end{aligned}$$

Řešení takové soustavy* popíšeme pomocí jednoho parametru: Například odečtením první rovnice od dvojnásobku té druhé vyloučíme neznámou y a vyjde

$$0=2(3x+y+2z)-(x+2y+3z)=5x+z,$$

tedy $z=-5x$. Podobně vyloučíme neznámou z a získáme

$$0=3(3x+y+2z)-2(x+2y+3z)=7x-y,$$

tedy $y=7x$. Všechna řešení odvozené lineární soustavy jsou tedy trojice tvaru $(x,y,z)=(t,7t,-5t)$ s libovolným reálným číslem t. Dosazením takové trojice do původní soustavy vyjde soustava

$$\begin{aligned}7t^2+1&=25t^2,\\ -35t^2+2&=t^2,\\ -5t^2+3&=49t^2,\end{aligned}$$

jejíž všechny rovnice jsou ekvivalentní se stejnou rovnicí $18t^2=1$, která má kořeny $t=\pm\sqrt{2}/6$. Docházíme tak ke stejnému závěru jako v původním řešení: soustavu ze zadání splňují právě dvě trojice

$$(x,y,z)\in\left\{(t,7t,-5t)\;\middle|\;t=\pm\sqrt{2}/6\right\}.$$

Jiné řešení. Při třetím postupu využijeme pro řešení zadané soustavy rovnic standardní dosazovací metodu, i když přitom uplatníme méně standardní obraty (níže zdůrazněné *kurzívou*).

Nejdříve ukážeme, že žádná z neznámých x, y, z se nemůže rovnat nule. Kdyby například bylo $y=0$, z prvních dvou rovnic soustavy bychom dostali $z=\pm1$ a $x=\pm\sqrt{2}$. Tyto hodnoty však nesplňují třetí rovnici $xz+3=0$. Podobně se vyloučí případy $x=0$ a $z=0$.

---

* Vysvětlete sami, proč k této soustavě dvou rovnic nemá smysl připojovat třetí lineární rovnici $2x-y-z=0$, která odpovídá mezivýsledku $(x,y,z)=(x,x-d,x+d)$ z původního řešení.

Díky odvozené podmínce $xyz \neq 0$ můžeme neznámou x vyjádřit z první a třetí rovnice:

$$\frac{z^2-1}{y} = x = \frac{y^2-3}{z}.$$

Dosaďme *oba krajní zlomky* do pravé strany zbylé (druhé) rovnice a upravujme:

$$\begin{aligned} yz+2 &= \frac{z^2-1}{y} \cdot \frac{y^2-3}{z}, \\ y^2z^2+2yz &= (z^2-1)(y^2-3), \\ y^2+2yz+3z^2-3 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminací neznámé x jsme tedy pro neznámé y a z obdrželi soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{z^2-1}{y} &= \frac{y^2-3}{z}, \\ y^2+2yz+3z^2-3 &= 0. \end{aligned}$$

Její řešení zahájíme tak, že *oba důsledky* druhé rovnice

$$y^2-3 = -(3z^2+2yz) \quad \text{a} \quad z^2-1 = -\tfrac{1}{3}(y^2+2yz)$$

dosadíme do čitatelů zlomků z první rovnice a upravíme:

$$\begin{aligned} -\frac{y^2+2yz}{3y} &= -\frac{3z^2+2yz}{z}, \\ y+2z &= 3(3z+2y), \\ 5y+7z &= 0. \end{aligned}$$

Je tedy $y = 7t$ a $z = -5t$ pro vhodné reálné číslo t. Dosazením do druhé rovnice odvozené soustavy pro neznámé y a z dostaneme pro neznámou t rovnici $49t^2 - 70t^2 + 75t^2 - 3 = 0$ neboli $18t^2 = 1$. To je rovnice z druhého postupu řešení, a tak závěr třetího postupu už zde vynecháme.

Návodné a doplňující úlohy:

Řešení soustavy rovnic často zahajujeme tak, že některé dvě její rovnice od sebe odečteme nebo několik jejích rovnic sečteme. Někdy se přitom vyplatí zmíněné rovnice předem vynásobit vhodnými čísly nebo i výrazy s neznámými, abychom získali jejich co nejjednodušší důsledek.

N1. Použijte popsanou metodu k vyřešení soustav: a) $3x+2y = x^2 \wedge 2x+3y = y^2$, b) $3xy - 10 = 2x^2 \wedge 2xy + 15 = 3y^2$ v oboru $\mathbb{R}$. [a) $(x,y) \in \{(0,0),(5,5)\}$ a $(x,y) \in \{(2,-1),(-1,2)\}$. Odečtením rovnic a úpravou výsledku dostaneme $(x-y)(x+y-1) = 0$, odkud $y = x$ nebo $y = 1-x$. Po dosazení takových y vyjdou v prvním, resp. druhém případě vždy dvě výše uvedená řešení. b) $(x,y) \in \{(2,3),(-2,-3)\}$. Vynásobme dané rovnice po řadě výrazy y a x. Po jejich následném sečtení se ve výsledku kubické členy navzájem zruší a dostaneme tak rovnici $15x - 10y = 0$, podle které $x = 2t$ a $y = 3t$ pro vhodné reálné t. Po dosazení takových x a y vyjde rovnice $t^2 = 1$ s kořeny $t = \pm 1$, kterým odpovídají výše uvedená řešení.]

N2. Ukažte, že z prvních dvou rovnic soustavy ze soutěžní úlohy vyplývá, že obě čísla $z-x$ a $x+y+z$ jsou různá od nuly. Jaké jsou obdobné důsledky jiných dvou rovnic? [Posuzované dvě rovnice od sebe odečtěte a výsledek pak upravte.]

D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y^2 = y^3,$$
$$y + x^2 = x^3.$$

[57–A–III–1]

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$
$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$
$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

[68–A–III–1]

D3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1, \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

[69–A–II–1]

D4. Navzájem různá reálná čísla a, b, c splňují $a + 1/b = b + 1/c = c + 1/a$. Dokažte, že $|abc| = 1$. [První rovnost přepíšeme na $a-b = 1/c-1/b = (b-c)/(bc)$. Podobně obdržíme $b - c = (c - a)/(ca)$ a $c - a = (a - b)/(ab)$. Po vynásobení tří odvozených rovností a následném vydělení nenulovým číslem $(a - b)(b - c)(c - a)$ už získáme požadované $(abc)^2 = 1$.]

D5. Najděte všechna reálná čísla $x \geqq 3$, pro která platí

$$x + \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} + \sqrt{(x-2)(x-3)} = 5.$$

[Odečteme jedničku a upravíme na

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}) = 4.$$

Po podobném odečtení dvojky, resp. trojky získáme

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) = 3,$$
$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}) = 2.$$

Odvozenou trojici vztahů teď snadno vyřešíme jako soustavu: Vydělíme-li vždy součin dvou rovnic tou třetí, dostaneme (s ohledem na nezápornost součtu dvou odmocnin)

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4 \cdot 3/2} = \frac{1}{2}\sqrt{24},$$
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} = \sqrt{4 \cdot 2/3} = \frac{1}{3}\sqrt{24},$$
$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{3 \cdot 2/4} = \frac{1}{4}\sqrt{24},$$

z čehož už snadno (jako ze soustavy tří lineárních rovnic pro neznámé hodnoty tří zastoupených odmocnin) určíme

$$\sqrt{x-1} = \frac{7}{24}\sqrt{24}, \quad \sqrt{x-2} = \frac{5}{24}\sqrt{24}, \quad \sqrt{x-3} = \frac{1}{24}\sqrt{24}.$$

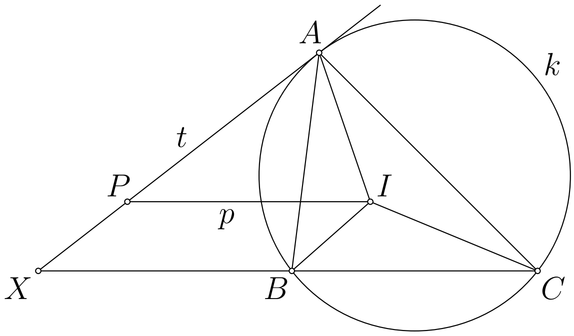
Těmto třem vztahům vyhovuje jediné číslo $x = 73/24$. Zkouška dosazením do původní rovnice je snadná.]

D6. Najděte všechna celá čísla $n \geqq 3$, pro která existují reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ taková, že $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ a $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. [Jakékoliv $n \geqq 3$ dělitelné třemi. Vynásobíme-li i-tou rovnici číslem a_{i+2} a všechny je pak sečteme, vznikne na levé straně součet členů $a_i a_{i+1} a_{i+2}$ a součet členů a_{i+2}. Téhož výsledku na levé straně lze dosáhnout, pokud před sečtením vynásobíme i-tou rovnici číslem a_{i-1} (položíme přitom $a_0 = a_n$). Rovnost obou vzniklých pravých stran $\sum_{i=1}^n a_{i+2}^2 = \sum_{i=1}^n a_{i-1}a_{i+2}$ lze přepsat do tvaru $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (a_{i-1} - a_{i+2})^2 = 0$, takže musí platit $a_{i-1} = a_{i+2}$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Odtud v případě $3 \nmid n$ vidíme, že dokonce všechna čísla a_i musí být stejná, což nelze, neboť rovnice $x^2 + 1 = x$ nemá reálné řešení. Naopak v případě $3 \mid n$ podmínkám ze zadání úlohy zřejmě vyhovíme n-ticí $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (2, -1, -1, \dots, 2, -1, -1)$. (IMO 2018)]

5. *V různostranném trojúhelníku ABC označme I střed vepsané kružnice a k kružnici opsanou. Polopřímky BI a CI protnou kružnici k po řadě v bodech $S_b \neq B$ a $S_c \neq C$. Dokažte, že tečna ke kružnici k v bodě A, přímka vedená bodem I rovnoběžně se stranou BC a přímka S_bS_c se protínají v jednom bodě.* (Patrik Bak)

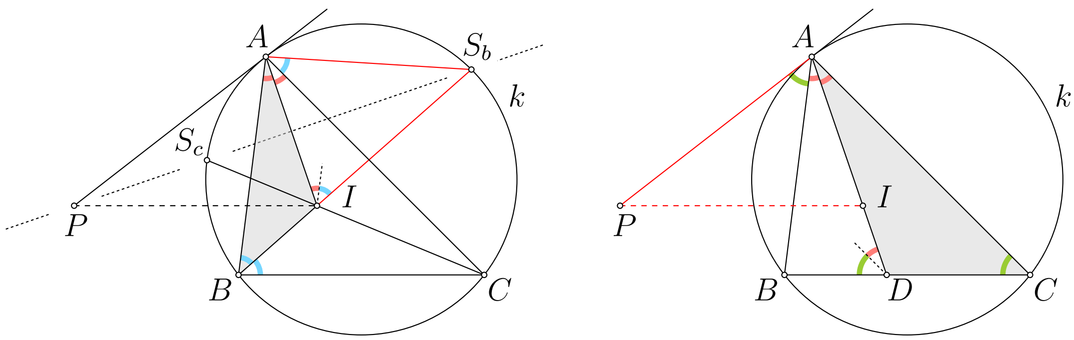
ŘEŠENÍ. Podle zadání je trojúhelník ABC různostranný. Budeme bez újmy na obecnosti dále předpokládat, že platí $|AB| < |AC|$. V případě $|AB| > |AC|$ totiž stačí vyměnit označení vrcholů B a C – taková změna nemá na dokazované tvrzení vliv.

Označme P průsečík dvou přímek ze zadání: tečny t ke kružnici k v bodě A a přímky p vedené bodem I rovnoběžně se stranou BC. Vysvětleme nejdříve, proč průsečík P vůbec existuje a proč přitom leží v polorovině opačné k polorovině ABC, jak je tomu na obrázku.



Z předpokladu $|AB| \neq |AC|$ plyne, že tečna t a sečna BC kružnice k nejsou rovnoběžné. Protínají se tedy v bodě, který označíme X a který je díky upřesnění $|AB| < |AC|$ vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce BC. Protože rovnoběžka p s přímkou BC prochází vnitřním bodem I trojúhelníku ABC, její průsečík P s tečnou t existuje a leží uvnitř úsečky AX. Bod P proto navíc – stejně jako bod X – skutečně leží v polorovině opačné k polorovině ABC.

Věnujme se nyní již úkolu ze zadání úlohy. Jistě ho splníme, když ověříme, že zadané body S_b a S_c leží na ose úsečky AI a že na této ose leží i námi zvolený průsečík P.



Zaměřme se nejdříve na bod S_b. Chceme dokázat $|S_bA| = |S_bI|$ neboli ověřit, že trojúhelník S_bAI je rovnoramenný se základnou AI. To je poměrně známé tvrzení (dále uvedené v návodné úloze N2), které pro úplnost nyní dokážeme.

Při standardním značení velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC podle obrázku vlevo platí

$$|\sphericalangle S_bAI| = |\sphericalangle S_bAC| + |\sphericalangle CAI| = |\sphericalangle S_bBC| + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Stejnou velikost má i druhý úhel AIS_b při základně AI, který totiž je vnějším úhlem trojúhelníku ABI, a proto

$$|\sphericalangle AIS_b| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Skutečně tedy platí $|S_bA| = |S_bI|$. S ohledem na symetrii platí i potřebná vlastnost druhého bodu S_c, totiž rovnost $|S_cA| = |S_cI|$.

Také pro třetí bod P k důkazu kýžené rovnosti $|PA| = |PI|$ uvážíme vnitřní úhly trojúhelníku PAI při základně AI a využijeme tentokrát obrázek vpravo. Fakt, že jedna z přímek určujících bod P je tečna kružnice k, nám umožňuje využít *větu o úsekovém úhlu.** Podle ní je úsekový úhel PAB shodný s obvodovým úhlem ACB.** Proto platí

$$|\sphericalangle PAI| = |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle BAI| = |\sphericalangle ACB| + \frac{\alpha}{2} = \gamma + \frac{\alpha}{2}.$$

K potřebnému vyjádření druhého úhlu PIA využijeme toho, že $PI \parallel BC$. Označme ještě D průsečík polopřímky AI se stranou BC. Ze shodnosti souhlasných úhlů AIP, ADB*** a díky faktu, že ADB je vnějším úhlem trojúhelníku ADC, máme

$$|\sphericalangle AIP| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle ACB| = \frac{\alpha}{2} + \gamma.$$

Jsme tak s celým řešením hotovi.

Poznámka. Znovu ukážeme, že oba body S_b, S_c leží na ose úsečky AI, a to kratším postupem, při kterém se obejdeme bez počítání úhlů.

Jistě stačí dokázat, že trojúhelníky AS_bS_c a IS_bS_c jsou shodné podle věty *usu*. Předně S_bS_c je jejich společná strana. K ní přilehlé úhly AS_bS_c a IS_bS_c jsou shodné jakožto obvodové úhly, které přísluší shodným obloukům AS_c a S_cB kružnice k. Stejně tak nahlédneme i shodnost druhých dvou přilehlých úhlů AS_cS_b a IS_cS_b (díky shodným obloukům AS_b a S_bC kružnice k). Jsme hotovi.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte *tvrzení „o Švrčkově bodu“*: V libovolném trojúhelníku ABC prochází osa vnitřního úhlu BAC středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. [Označme $S \neq A$ druhý průsečík osy úhlu BAC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Kratším obloukům SB, SC kružnice opsané příslušejí stejně velké obvodové úhly, takže tyto oblouky jsou shodné.]

N2. Dokažte *tvrzení „o třech prstech“*: V daném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a S střed toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. Pak platí $|SB| = |SI| = |SC|$. [S ohledem na symetrii stačí dokázat jen rovnost $|SB| = |SI|$. Při standardním značení velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC platí

$$|\sphericalangle SBI| = |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle SAC| + \beta/2 = \alpha/2 + \beta/2.$$

Protože SIB je vnější úhel trojúhelníku ABI, platí rovněž

$$|\sphericalangle SIB| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \alpha/2 + \beta/2.$$

* Viz návodnou úlohu N4.

** To je korektní závěr, pokud přímka AB body P a C odděluje, což podle úvodní části našeho řešení skutečně platí díky předpokladu $|AB| < |AC|$.

*** Zde využíváme toho, že úsečka IP protíná stranu AB (a ne stranu AC).

Trojúhelník SIB tak skutečně má shodná ramena SB a SI.]

N3. Dokažte, že v soutěžní úloze je přímka S_bS_c osou úsečky AI. [Podle výsledku úlohy N2 platí $|S_bA| = |S_bI|$ a $|S_cA| = |S_cI|$, takže S_A, S_B jsou dva různé body osy úsečky AI.]

N4. Dokažte *větu o úsekovém úhlu*: Uvažme trojúhelník ABC vepsaný do kružnice k, tečnu kružnice k vedenou bodem B a bod T na této tečně v polorovině opačné k polorovině BCA. Pak platí $|\sphericalangle TBC| = |\sphericalangle BAC|$. (Úhel TBC je tzv. *úsekový úhel* příslušný tomu oblouku BC kružnice k, který neobsahuje bod A.) [Označme Y libovolný vnitřní bod toho oblouku BC, který neobsahuje bod A. Pak YBC je obvodový úhel shodný s obvodovým úhlem YAC. Limitním přechodem $Y \to B$ dostaneme, že úsekový úhel TBC má stejnou velikost jako obvodový úhel BAC. (Tečna TB je totiž limitní polohou sečny YB.)]

D1. V situaci ze soutěžní úlohy označme dále $S_a \neq A$ průsečík polopřímky AI s kružnicí k. Dokažte, že bod I je průsečíkem výšek trojúhelníku $S_aS_bS_c$. [Přímka S_bS_c je jakožto osa úsečky AI (viz N3) kolmá na S_aI. Podobně přímka S_bI je kolmá na S_aS_c.]

D2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN. [70–A–III–2]

D3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D4. Označme I střed kružnice vepsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Jeho vnitřní bod P splňuje podmínku $|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|$. Dokažte, že $|AP| \geqq |AI|$, přičemž rovnost nastane, právě když $P = I$. [Nechť $|\sphericalangle PBA| = \frac{1}{2}\beta + \delta$, pak $|\sphericalangle PBC| = \frac{1}{2}\beta - \delta$ a ze zadané úhlové podmínky snadno plyne $|\sphericalangle PCA| = \frac{1}{2}\gamma - \delta$ a $|\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}\gamma + \delta$. Odtud $|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, takže úhel BPC má velikost $90° + \frac{1}{2}\gamma$, což je jak známo i velikost úhlu BIC. Proto bod P z poloroviny BCA leží na oblouku BIC kružnice opsané trojúhelníku BIC. Ta má střed ve středu kratšího oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, což je bod na polopřímce AI, takže I je tím bodem oblouku BIC, který je k bodu A nejblíže. (IMO 2006)]

D5. Osy vnitřních úhlů u vrcholů B, C ostroúhlého trojúhelníku ABC protnou protější strany po řadě v bodech K, L. Označme M průsečík přímky BK s osou úsečky CL. Bod N leží na přímce CL tak, že $NK \parallel LM$. Dokažte, že $|NK| = |NB|$. [Bod M jakožto průsečík osy ostrého úhlu CBL a osy úsečky CL je středem kratšího oblouku CL kružnice opsané trojúhelníku BCL. Odtud a ze zadané rovnoběžnosti plyne $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MLC| = |\sphericalangle KNC|$, takže čtyřúhelník $BCKN$ je tětivový. Proto bod N leží na kratším oblouku BK kružnice opsané trojúhelníku BCK, který má totiž ostrý úhel u vrcholu C, na jehož ose bod N rovněž leží. Je tak středem zmíněného oblouku BK, odkud již plyne $|NK| = |NB|$. (Junior Balkan 2010)]

6. *Uvažujme nekonečnou posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ celých čísel, která splňuje podmínky $a_0 \geqq 2$ a $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ pro všechny indexy $n \geqq 0$. Dokažte, že každá taková posloupnost obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.*

(Martin Melicher, Josef Tkadlec)

ŘEŠENÍ. Dokážeme sporem, že taková posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nemůže obsahovat jen konečně mnoho složených čísel. Připusťme, že je jich jen konečně mnoho. Pak od určitého členu a_m včetně obsahuje posloupnost už jen prvočísla. Jelikož posloupnost je díky svému zadání rostoucí (z $t \geqq 2$ totiž plyne $2t + 1 > 2t - 1 > t$), můžeme navíc bez újmy na obecnosti předpokládat, že pro vybraný index m již platí $a_m \geqq 5$, a tedy rovněž $a_n \geqq 5$ pro všechna $n \geqq m$.

Nejdřív si rozmyslíme, že aby mezi čísly $a_n \geqq 5$ s indexy $n \geqq m$ nebyl žádný násobek tří (jinak by takové a_n nebylo prvočíslo), musí buď pro všechna $n \geqq m$ platit $a_{n+1} = 2a_n + 1$, nebo musí pro všechna $n \geqq m$ platit $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Skutečně, samo prvočíslo a_m díky předpokladu $a_m \geqq 5$ není dělitelné třemi, takže máme dvě možnosti:

- Pokud člen a_m dává zbytek 1 po dělení třemi, pak číslo $2a_m + 1$ je dělitelné třemi. Musíme proto mít $a_{m+1} = 2a_m - 1$, což je prvočíslo, které dává opět zbytek 1 po dělení třemi. Můžeme tak uplatnit matematickou indukci, podle které pak $a_{n+1} = 2a_n - 1$ pro každé $n \geqq m$.
- Podobně pokud člen a_m dává zbytek 2 po dělení třemi, pak číslo $2a_m - 1$ je dělitelné třemi. Musíme proto mít $a_{m+1} = 2a_m + 1$, což je prvočíslo, které dává opět zbytek 2 po dělení třemi. Díky matematické indukci pak $a_{n+1} = 2a_n + 1$ pro každé $n \geqq m$.

Zbývá tedy vyřešit dva případy:

1. Pro každé $n \geqq m$ platí $a_{n+1} = 2a_n - 1$.
2. Pro každé $n \geqq m$ platí $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

V obou případech dojdeme ke sporu tak, že najdeme člen a_n, kde $n > m$, který je násobkem prvočísla a_m, a není tak prvočíslem. Pro přehlednost dalších zápisů označíme samo prvočíslo a_m písmenem p. Zopakujme, že $p \geqq 5$, tudíž p je liché.

Zaměřme se nejdřív na případ 1, případ 2 později vyřešíme obdobně.

V případě 1 postupným dosazováním dostáváme

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 2p - 1, \\ a_{m+2} &= 2 \cdot (2p - 1) - 1 = 4p - 3, \\ a_{m+3} &= 2 \cdot (4p - 3) - 1 = 8p - 7. \end{aligned}$$

Matematickou indukcí dokážeme, že $a_{m+i} = 2^i \cdot (p - 1) + 1$ pro každé $i \geqq 0$.* Skutečně, pro $i = 0$ rovnost platí a platí-li pro některé $i \geqq 0$, pak platí i pro $i + 1$, neboť

$$a_{m+i+1} = 2 \cdot (2^i \cdot (p - 1) + 1) - 1 = 2^{i+1}(p - 1) + 1.$$

Nyní volbou $i = p - 1$ a použitím malé Fermatovy věty**, podle které $p \mid \left(2^{p-1} - 1\right)$, neboť p je liché prvočíslo, dostaneme

$$a_{m+p-1} = 2^{p-1}(p - 1) + 1 \equiv 1 \cdot (p - 1) + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

* O jiném určení vzorců pro a_{m+i} v případech 1 a 2 viz metodu z návodné úlohy N2.

** Viz návodnou úlohu N5. V ní i ve zbytku řešení pracujeme s kongruencemi. Poučení o nich lze nalézt v brožuře Kongruence ze Školy mladých matematiků.

což je avizovaný spor $a_m \mid a_{m+p-1}$ (připomeňme, že $p = a_m$). V případě 2 zcela obdobně dokážeme vztah $a_{m+i} = 2^i \cdot (p+1) - 1$ pro každé $i \geqq 0$. Opětovnou volbou $i = p-1$ a stejným užitím malé Fermatovy věty dostaneme

$$a_{m+p-1} = 2^{p-1}(p+1) - 1 \equiv (p+1) - 1 \equiv 0 \pmod p,$$

což je stejný spor jako v případě 1.

JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme jiný způsob jak vyřešit případ 1, a to bez hledání vzorce pro a_{m+i} a následného užití malé Fermatovy věty. I nyní dojdeme ke sporu, že totiž mezi členy a_n (kde $n > m$) se vyskytuje násobek členu a_m. Stejný sporný závěr se v případě 2 odvodí analogicky.*

Sledujme, jaké zbytky dávají členy posloupnosti $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ po dělení lichým prvočíslem $p = a_m$. První člen a_m dává zbytek 0. Pokud stávající člen a_n dává zbytek z, následující člen a_{n+1} dává díky rovnosti $a_{n+1} = 2a_n - 1$ zbytek $2z - 1 \pmod p$.

Klíčové pozorování je, že pro liché p je zobrazení $f\colon z \mapsto 2z - 1 \pmod p$ prosté na množině $M_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ všech možných zbytků po dělení p, tedy že pro libovolná $z \neq z' \in M_p$ platí $f(z) \neq f(z')$: Skutečně, pokud $f(z) = f(z')$, pak

$$p \mid (2z-1) - (2z'-1) = 2(z - z')$$

a jelikož p je liché, plyne z toho $p \mid z - z'$, což pro zbytky $z, z' \in M_p$ znamená $z = z'$.

Jelikož možných zbytků po dělení číslem p je jen konečně mnoho (konkrétně p), musí se v posloupnosti zbytků členů $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ některý zbytek zopakovat. Tvrdíme, že první opakující se zbytek je právě zbytek 0 prvního členu $a_m = p$: Skutečně, kdyby prvním opakujícím se zbytkem byly až zbytky dvojice a_{m+i}, a_{m+j} pro nějaká $1 \leqq i < j$, byly by a_{m+i-1}, a_{m+j-1} dva členy s různými zbytky, jejichž následníci však dávají stejný zbytek. To je ale ve sporu s dokázaným klíčovým pozorováním. Tím je potřebná existence indexu $n > m$ s vlastností $a_m \mid a_n$ dokázána.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte všechna kladná celá čísla t taková, že čísla t, $2t-1$ a $2t+1$ jsou všechna prvočísla. [$t = 2$ a $t = 3$, kdy jde o trojice prvočísel $(2, 3, 5)$, resp. $(3, 5, 7)$. Protože $t = 1$ není prvočíslo, zbývá vyloučit případ $t \geqq 4$. Tehdy prvočíslo t dává při dělení třemi zbytek 1 nebo 2. Pokud $t = 3k+1$, kde $k \geqq 1$, je číslo $2t + 1 = 6k + 3 \geqq 9$ dělitelné třemi. Pokud $t = 3k + 2$, kde $k \geqq 1$, je číslo $2t - 1 = 6k + 3 \geqq 9$ dělitelné třemi.]

N2. Jsou dána reálná čísla d a $q \notin \{0, 1\}$. Dokažte, že posloupnost čísel $x_0, x_1, \ldots$ splňuje pro každý index i rovnost $x_{i+1} = qx_i + d$, právě když je její obecný člen tvaru $x_i = Kq^i + c$, kde $c = d/(1-q)$ a K je libovolná konstanta (určená prvním členem x_0). [Číslo c je zadáno tak, že rovnosti $x_{i+1} = qx_i + d$ lze přepsat do tvaru $x_{i+1} - c = q(x_i - c)$. Tyto upravené rovnosti znamenají právě to, že čísla $y_i = x_i - c$ tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem q, tj. že $y_i = Kq^i$ pro každé i.]

N3. Uvažme jakékoliv zobrazení $f\colon M \to M$ na konečné množině M a prvek $m \in M$. Dokažte, že posloupnost $m, f(m), f(f(m)), \ldots$ je od jistého členu periodická. Dále dokažte, že pokud zobrazení f je prosté, pak tato posloupnost je periodická od svého prvního členu m. [Podle Dirichletova principu se mezi prvními $|M|+1$ členy posloupnosti alespoň jeden prvek musí opakovat. Od jeho prvního výskytu tak posloupnost bude periodická, neboť každý další člen zadané posloupnosti je jednoznačně určen předchozím členem. Kdyby

* Využije se k tomu zobrazení $z \mapsto 2z + 1$ namísto zobrazení $z \mapsto 2z - 1$.

posloupnost nebyla periodická od prvního členu, našly by se v ní dva výskyty téhož prvku, kterému předchází dva různé členy, což nenastane, je-li zobrazení f prosté.]

N4. Dokažte, že pro každé liché číslo d se zbytky čísel $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ po dělení číslem d od prvního místa periodicky opakují. [Užijte obecný výsledek úlohy N3 pro zobrazení $f\colon z \mapsto 2z \pmod p$ na množině $\{1, 2, \dots, d-1\}$.]

N5. Dokažte *malou Fermatovu větu*: Pro libovolné prvočíslo p a celé číslo a nesoudělné s p platí $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. [Ukažte, že zobrazení $f_a\colon t \mapsto a \cdot t \pmod p$ je prosté na množině $\{1, 2, \dots, p-1\}$, takže je to bijekce. Porovnáním součinu všech $p-1$ vzorů a součinu všech $p-1$ obrazů dostaneme

$$(p-1)! \equiv (a \cdot 1)(a \cdot 2) \dots (a \cdot (p-1)) \equiv a^{p-1}(p-1)! \pmod p.$$

Po vydělení kongruence číslem $(p-1)!$ (nesoudělným s jejím modulem p) už vychází potřebné.]

D1. Dokažte, že každé kladné celé číslo n má násobek, v jehož desítkovém zápisu se vyskytují jen nuly a jedničky. [Z Dirichletova principu mezi čísly $1, 11, 111, \dots$ existují dvě, která dávají stejný zbytek po dělení n. Jejich rozdíl má požadovanou vlastnost.]

D2. Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n existuje n-místné číslo a_n, které je násobkem 5^n a jehož všechny číslice jsou liché. [Důkaz provedeme matematickou indukcí: Pro $n = 1$ vyhovuje $a_1 = 5$. Mějme vyhovující a_n pro některé $n \geqq 1$. Čísla $a_n + i \cdot 10^n$ pro $i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ jsou všechna násobky 5^n a přitom dávají navzájem různé zbytky po dělení 5^{n+1}, takže jedno z nich je násobkem 5^{n+1}. Toto číslo lze vzít za a_{n+1}, neboť je zřejmě $(n+1)$-místné a všechny jeho číslice jsou liché. (USA 2003)]

D3. Dokažte, že každé kladné celé číslo d má násobek, který je Fibonacciho číslem. (Fibonacciho čísla jsou určena vztahy $F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro každý index $n \geqq 1$.) [Všude dále pod „zbytky" rozumíme „zbytky po dělení daným číslem d". Předřaďme posloupnosti Fibbonaciho čísel $\left(F_i\right)_{i=1}^{\infty}$ jako její nultý člen číslo $F_0 = F_2 - F_1 = 0$ (pak vztah ze zadání bude platit i pro $n = 0$) a sledujme zbytky jejích dvojic po sobě následujících členů. Těchto dvojic zbytků je nejvýše $d \cdot d$ různých, tedy mezi prvními $d^2 + 1$ dvojicemi se některá dvojice musí zopakovat. Jelikož navíc zbytek následujícího členu je jednoznačně určen zbytky dvou předchozích členů, je posloupnost všech zbytků od jistého místa periodická. Protože navíc ze zbytků dvou sousedních členů lze jednoznačně určit i zbytky všech předchozích členů, je posloupnost zbytků periodická od svého nultého členu, kterým je ovšem zbytek 0 (neboť $F_0 = 0$ je násobkem d, ať je dané d jakékoli). Zbytek 0 tak má dokonce nekonečně mnoho Fibonacciho čísel.]

D4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dávají po dělení čtyřmi zbytek 3. [Důkaz sporem: Připusťme, že je takových prvočísel jen konečně mnoho, a označme je všechna $p_1, \dots, p_k$. Všimněme si, že pokud několik čísel dává po dělení čtyřmi stejný zbytek 1, má tuto vlastnost i jejich součin. Liché číslo

$$N = 4 \cdot p_1 p_2 \dots p_k - 1$$

však dává po dělení čtyřmi zbytek 3, takže takový musí rovněž být aspoň jeden z jeho prvočinitelů (může jím být i samo číslo N). Žádné z prvočísel $p_1, \dots, p_k$ ale není dělitelem N, spor. (Dodejme pro zajímavost proslulou *Dirichletovu větu*: Pro každá dvě nesoudělná čísla d a z (kde $1 \leqq z < d$) existuje nekonečně mnoho prvočísel, která dávají po dělení číslem d zbytek z. Elementární důkaz Dirichletovy věty není znám.)]