Úlohy domácí části I. kola kategorie B

1. *Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod* 11 990. *Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.* (Patrik Bak)

Řešení. V dotyčném trojúhelníku označme písmenem p prvočíselnou délku jedné odvěsny a písmeny a, b celočíselné délky druhé odvěsny, resp. přepony.

Rovnost z Pythagorovy věty $p^2 + a^2 = b^2$ přepíšeme do tvaru

$$p^2 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Oba činitelé $b + a$ a $b - a$ jsou zřejmě přirozená čísla. Číslo p^2 lze ovšem takto rozložit na součin jen dvěma způsoby: jako $p \cdot p$ a $1 \cdot p^2$. Protože navíc $b - a < b + a$, musí nutně být $b - a = 1$ a $b + a = p^2$.

Podle zadání pro obvod našeho trojúhelníku platí $p + a + b = 11\,990$. Dosadíme-li sem za $a + b$ hodnotu p^2, dostaneme $p + p^2 = 11\,990$. Nyní máme několik možností, jak odtud určit hledané prvočíslo p.

- Číslo $p + p^2 = p(p + 1)$ je rovno číslu 11 990, jehož rozklad na prvočinitele je $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 109$. Odtud plyne, že p je jedno z prvočísel 2, 5, 11 nebo 109. Avšak rovnost $p(p + 1) = 11\,990$ z nich splňuje pouze $p = 109$ (kdy přitom $p + 1 = 110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$).
- Uhodneme-li, že rovnice $x(x + 1) = 11\,990$ má řešení $x = 109$, pak stačí dodat, že jiná kladná řešení v oboru kladných reálných čísel neexistují, neboť funkce $y = x(x + 1)$ je na intervalu $(0, \infty)$ zřejmě rostoucí.*
- Kvadratická rovnice $p^2 + p - 11\,990 = 0$ má kořeny
$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 47\,960}}{2} = \frac{-1 \pm 219}{2},$$
tj. $p_1 = 109$ a $p_2 = -110$, z nichž prvočíslem je pouze číslo 109.

Závěr. Hledaná délka odvěsny je rovna 109.

Poznámka. Zadání úlohy konstatuje, že trojúhelník popsaných vlastností existuje; naší úlohou bylo jen najít prvočíselnou délku jeho odvěsny, kterou jsme v našem řešení označili p. Vyšla nám jediná možná hodnota $p = 109$. Proveďme až nyní zkoušku, která ukáže, zda úloha byla zadána správně, zda tedy popsaný trojúhelník skutečně existuje. (Pokud bychom ovšem v řešení dospěli k závěru, že v úvahu připadá více hodnot p, museli bychom zkoušku provést v samotném řešení, abychom zjistili, pro která z nalezených p trojúhelník zadaných vlastností existuje.)

Pro $p = 109$ z našich rovnic $b - a = 1$ a $b + a = p^2$ vychází $a = \frac{1}{2}(p^2 - 1) = 5940$ a $b = a + 1 = 5941$, což jsou skutečně dvě přirozená čísla. Zbývá ověřit, že určená čísla p, a jsou odvěsny a b je přepona některého pravoúhlého trojúhelníku. To podle obrácené Pythagorovy věty nastane, pokud bude platit rovnost $p^2 + a^2 = b^2$ neboli $p^2 = (b - a)(b + a)$. Tuto rovnost ovšem není nutné ověřovat numericky, neboť víme, že platí $b - a = 1$ a $b + a = p^2$. Zadání úlohy tedy bylo v pořádku.

* Je-li totiž $0 < u < v$, je také $0 < u + 1 < v + 1$, a proto podle pravidla o násobení nerovností platí $u(u + 1) < v(v + 1)$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Pro dané prvočíslo p najděte všechny dvojice celých čísel c a d, pro něž platí $c > d$ a $cd = p^2$. [$(c,d) = (p^2,1)$ a $(c,d) = (-1,-p^2)$. Protože ± 1, $\pm p$ a $\pm p^2$ jsou jediní dělitelé čísla p^2, rozložit p^2 na součin dvou *různých* celých čísel lze dvěma způsoby: $p^2 = 1 \cdot p^2 = (-1)\cdot(-p^2)$. Úloze tak vyhovují jen dvě výše uvedené dvojice.]

N2. Najděte všechna řešení (p,q) rovnice $p^2 = q^2 - 28q + 52$ v kladných celých číslech taková, že p je prvočíslo. [$(p,q) = (5,27)$ a $(p,q) = (5,1)$. Po rozkladu pravé strany rovnice na součin máme $p^2 = (q-2)(q-26)$. Protože pro čísla $c = q-2$ a $d = q-26$ platí $c > d$, jsme v situaci z úlohy N1. Možnosti $q-2 = p^2 \wedge q-26 = 1$, resp. $q-2 = -1 \wedge q-26 = -p^2$ vedou k výše uvedeným řešením.]

D1. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]

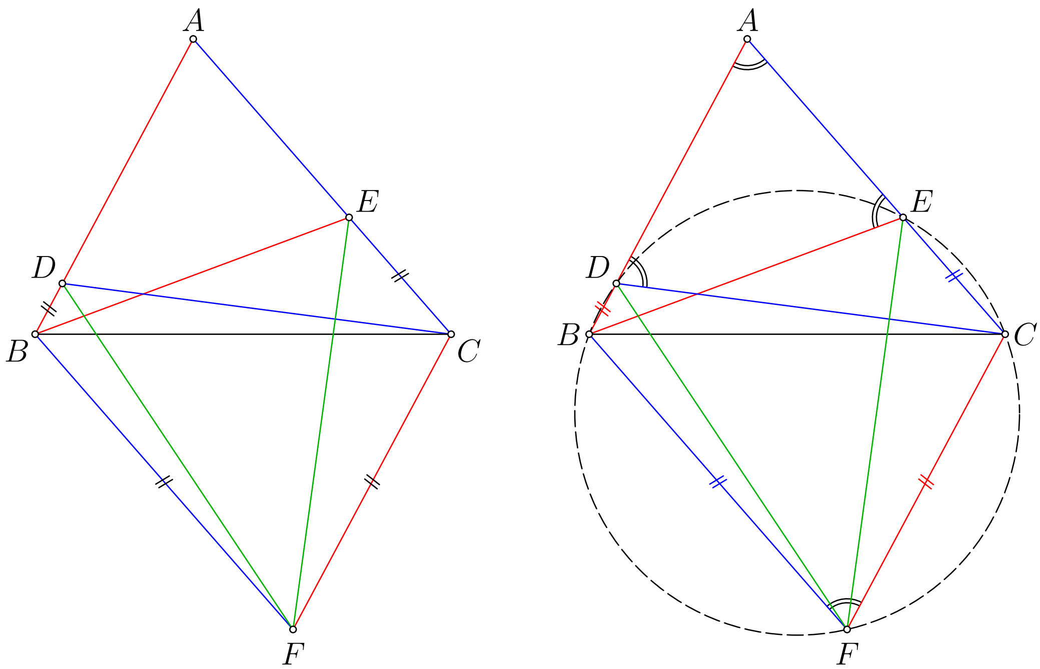
D2. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55–C–II–4]

D3. Najděte všechny trojice a, b, c kladných celých čísel takových, že součin $(a+b)(b+c)(c+a)$ je roven mocnině některého prvočísla. [Návodná úloha N2 k 69–A–I–6]

D4. Najděte všechny trojice (p,q,r) prvočísel, pro něž platí $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$. [60–A–III–2]

2. *Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.* (Patrik Bak, Josef Tkadlec)

Řešení. Protože $CE \parallel BF$ a $|BE| = |BA| = |FC|$ (viz obrázek vlevo), tak $BFCE$ je buď rovnoramenný lichoběžník, nebo rovnoběžník.* Rovnoběžník to ale být nemůže, protože $FC \parallel BA \nparallel BE$. Je to tedy rovnoramenný lichoběžník. Podobně se ukáže, že $CFBD$ je také rovnoramenný lichoběžník. Protože úhlopříčky každého rovnoramenného lichoběžníku jsou stejně dlouhé,** máme $|BC| = |FE|$ a $|BC| = |FD|$. Odtud už plyne $|FD| = |FE|$.



Jiné řešení. Z rovnoběžníku $ABFC$ a rovnoramenných trojúhelníků ADC, AEB plyne, že stejnou velikost α mají čtyři úhly BAC, BFC, ADC a AEB (vyznačené na obrázku vpravo obloučky). Proto úhly BDC a CEB (vedlejší k ADC, resp. AEB) mají velikost $180° - \alpha$. Jelikož jejich vrcholy D a E leží v opačné polorovině s hranicí BC nežli vrchol F úhlu BFC o velikosti α, jsou oba čtyřúhelníky $BFCD$ a $BFCE$ tětivové.*** Odtud dostáváme, že body B, F, C, E, D leží na jedné kružnici. Ze shodnosti jejich obvodových úhlů FBD a FCE (jakožto protějších vnitřních úhlů rovnoběžníku $ABFC$) plyne shodnost tětiv FD a FE. Jsme hotovi.

Jiné řešení. Z porovnání rovnoramenných trojúhelníků ADC a AEB plyne, že úhly ADC a AEB jsou shodné. Proto jsou také shodné s nimi střídavé úhly FCD a EBF. Pro trojúhelníky FCD a EBF to spolu s rovnostmi $|CF| = |BE|$ a $|CD| = |BF|$ (viz první řešení) znamená, že jsou shodné podle věty *sus*. Proto jsou shodné i jejich třetí strany FD a FE, jak jsme měli dokázat.

* Viz návodnou úlohu N1.

** Viz návodnou úlohu N3.

*** Konvexní čtyřúhelník je tětivový, *právě když* je součet velikostí dvou jeho protějších vnitřních úhlů roven 180°. Toto tvrzení a jeho důkaz najdete najdete na str. 20 brožury Kružnice ze Školy mladých matematiků.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte známé tvrzení: Pokud v konvexním čtyřúhelníku $PQRS$ platí $PQ \parallel RS$ a $|QR| = |PS|$, pak je $PQRS$ buď rovnoběžník, nebo rovnoramenný lichoběžník. [Rozlišme, zda kromě obou podmínek ze zadání platí ještě $|PQ| = |RS|$ či nikoliv. Pokud ano, jsou trojúhelníky PQR a RSP shodné podle věty *sss*, a tak jsou shodné střídavé úhly PRQ a RPS; platí tudíž $QR \parallel PS$, čili $PQRS$ je rovnoběžník. V případě, kdy $|PQ| \neq |RS|$, můžeme s ohledem na symetrii předpokládat, že $|PQ| > |RS|$. Tehdy uvnitř strany PQ zvolíme bod T tak, aby platilo $|PT| = |RS|$. Spolu s $PT \parallel RS$ to pak znamená, že konvexní čtyřúhelník $PTRS$ je rovnoběžník. Z něho a z trojúhelníku TQR vidíme, že $PS \parallel TR \nparallel QR$, takže $PQRS$ je rovnoramenný lichoběžník.]

N2. Uvažme situaci ze soutěžní úlohy. Najděte dva rovnoramenné lichoběžníky s vrcholy v bodech A, B, C, D, E, F. [$BFCD$ a $BFCE$. Plyne to z tvrzení uvedeného v úloze N1.]

N3. Dokažte známé tvrzení o shodnosti úhlopříček každého rovnoramenného lichoběžníku. [Mějme rovnoramenný lichoběžník $PQRS$ s delší základnou PQ a pokračujme v úvahách z řešení úlohy N1: Protože v trojúhelníku TQR máme $|TR| = |QR|$, je úhel RQT shodný s úhlem RTQ, který je rovněž shodný se souhlasným úhlem SPQ. Lichoběžník $PQRS$ tak má shodné oba vnitřní úhly při základně PQ, a proto kýžená rovnost $|PR| = |QS|$ plyne z trojúhelníků PQR a QPS, shodných podle věty *sus*.]

D1. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici. [63–B–I–3]

D2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou AA' a BB' jeho výšky. Kolmý průmět bodu A' na výšku BB' označme D. Předpokládejme, že kružnice procházející body B, C, D protne stranu AC v jejím vnitřním bodě E. Dokažte, že $|DE| = |AA'|$. [70–B–I–3]

D3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$. [70–B–II–3]

D4. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$. Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý. [67–A–I–5]

D5. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec. [55–A–I–3]

3. *Určete počet devítimístných čísel, v nichž se číslice* $0-9$ *vyskytují nejvýše jednou a v nichž se součty číslic na* 1. *až* 3. *místě, na* 3. *až* 5. *místě, na* 5. *až* 7. *místě a na* 7. *až* 9. *místě všechny rovnají témuž číslu* 10. *Najděte rovněž nejmenší a největší z těchto čísel.* (Jaroslav Zhouf)

Řešení. Uvažme libovolné vyhovující číslo. Podle zadání je v jeho dekadickém zápisu $\overline{abcdefghi}$ devět různých číslic. Desátou (nezastoupenou) číslici označíme j.

Víme, že platí

$$a+b+c=10, \quad c+d+e=10, \quad e+f+g=10 \quad \text{a} \quad g+h+i=10.$$

Sečteme-li tyto čtyři rovnosti, dostaneme

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+(c+e+g)=40. \tag{1}$$

Zároveň víme, že

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j=0+1+2+\ldots+9=45,$$

tj. $a+b+c+d+e+f+g+h+i=45-j$. Po dosazení do (1) dostáváme $(45-j)+(c+e+g)=40$, odkud $j=5+(c+e+g)$. Protože však $j \leqq 9$ a $c+e+g \geqq 0+1+2=3$, pro rovnost $j=5+(c+e+g)$ máme jen dvě možnosti: buď platí $j=8$ a $\{c,e,g\}=\{0,1,2\}$, nebo platí $j=9$ a $\{c,e,g\}=\{0,1,3\}$. Oba tyto navzájem se vylučující případy teď posoudíme odděleně.

1. *Případ* $j=8$ *a* $\{c,e,g\}=\{0,1,2\}$. Protože číslice $j=8$ v uvažovaném čísle chybí, nemohou v něm číslice 0 a 2 být spolu v žádné trojici, která dává součet 10. Proto z rovností $c+d+e=10=e+f+g$ plyne $\{0,2\} \neq \{c,e\}$ a $\{0,2\} \neq \{e,g\}$, takže podle $\{c,e,g\}=\{0,1,2\}$ musí platit $\{0,2\}=\{c,g\}$, a tudíž $e=1$. Z obou možností $(c,g)=(0,2)$ a $(c,g)=(2,0)$ podrobně rozebereme tu první. Poznamenejme i zde zřejmý fakt, že obě možnosti se navzájem vylučují.

   Nechť tedy $c=0$ a $g=2$. Pak čtyři podmínky na součty číslic (zapsané úvodem řešení) budou (rovněž s přihlédnutím k $e=1$) splněny, právě když bude současně platit $a+b=10$, $d=9$, $f=7$ a $h+i=8$. Pro dosud neurčené číslice navíc platí $\{a,b,h,i\}=\{3,4,5,6\}$. Je proto $\{a,b\}=\{4,6\}$ (dvě možnosti – buď $a=4$ a $b=6$, nebo naopak) a $\{h,i\}=\{3,5\}$ (také dvě možnosti). Tím získáváme $2\cdot 2=4$ vyhovující čísla (460 917 235, 460 917 253, 640 917 235, 640 917 253).

   Podobným způsobem lze rozebrat druhou možnost $c=2$, $g=0$ a získat tak další čtyři vyhovující čísla. Místo toho si však stačí uvědomit, že volbou $c=2$, $g=0$ získáme právě ta čísla, která mají opačné pořadí číslic nežli čísla získaná při první volbě $c=0$, $g=2$; bude jich tedy stejný počet. Případu 1 tedy odpovídá celkem $4+4=8$ vyhovujících čísel.
2. *Případ* $j=9$ *a* $\{c,e,g\}=\{0,1,3\}$. Postupujme podobně jako v případě 1 a pišme proto místy stručněji: Protože číslice $j=9$ v hledaném čísle chybí, nemohou v něm číslice 0 a 1 být spolu v žádné trojici, která dává součet 10. Proto z rovností $c+d+e=10=e+f+g$ tentokrát plyne $\{0,1\}=\{c,g\}$ a $e=3$. První možnost $(c,g)=(0,1)$ vede k podmínkám $a+b=10$, $d=7$, $f=6$, $h+i=9$

a $\{a,b,h,i\} = \{2,4,5,8\}$. Tedy $\{a,b\} = \{2,8\}$ a $\{h,i\} = \{4,5\}$, což dává opět čtyři vyhovující čísla. Druhá možnost $(c,g) = (1,0)$ dává díky symetrii čtyři další vyhovující čísla, takže v případě (2) je jich dohromady opět 8.

Shrňme výsledky obou případů 1 a 2: Protože jsme žádné číslo nikde nezapočítali dvakrát, vyhovujících čísel je celkem $8 + 8 = 16$. Největší z nich bude podle našeho rozboru začínat číslicí $a = 8$ z případu 2, kdy $b = 2$ a $\{h,i\} = \{4,5\}$, bude to tedy číslo 820 736 154. Podobně nejmenší vyhovující číslo bude začínat číslicí $a = 2$ z případu 2 a bude to číslo 280 736 145.

Závěr. Počet vyhovujících čísel je roven 16. Největší a nejmenší z nich jsou 820 736 154 a 280 736 145.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Součet devíti navzájem různých číslic je 42. Které jsou to číslice? [Všechny kromě trojky. Protože $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, musí chybět číslice rovná $45 - 42 = 3$.]

N2. Navzájem různé číslice a, b, c, d splňují rovnost $a + b + c + 6 = d$. Které jsou to číslice? [$\{a,b,c\} = \{0,1,2\}$ a $d = 9$. Plyne to z nerovností $a + b + c \geqq 0 + 1 + 2 = 3$ a $d \leqq 9$.]

N3. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 1, 3, 5, 7, 9 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Kolik je takových čísel? [24. Číslo se zápisem $\overline{abcde}$, kde $\{a,b,c,d,e\} = \{1,3,5,7,9\}$, je vyhovující, právě když platí $a + b + c = c + d + e$ neboli $a + b = d + e$. Z poslední rovnosti dvou sudých čísel plyne, že součet čísel ve čtyřprvkové množině $\{a,b,d,e\}$ je dělitelný čtyřmi, takže z pěti podmnožin přicházejí v úvahu pouze tři: $\{3,5,7,9\}$, $\{1,3,7,9\}$ a $\{1,3,5,7\}$. Odpovídá jim vždy jediné rozdělení na dvě dvojice se stejným součtem: $3+9 = 5+7$, resp. $1+9 = 3+7$, resp. $1 + 7 = 3 + 5$. Každou vyhovující čtveřici (a,b,d,e) tedy určíme tak, že nejprve vybereme jednu z těchto rovností (3 možnosti), pak jednu její stranu přiřadíme množině $\{a,b\}$ a druhou stranu množině $\{d,e\}$ (2 možnosti) a nakonec rozhodneme, který ze dvou přiřazených sčítanců je a a který ze dvou přiřazených sčítanců je d ($2 \cdot 2 = 4$ možnosti). Hledaný počet vyhovujících čísel je tedy $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.]

N4. Pokud bychom v zadání soutěžní úlohy požadovali, aby se uvažované součty číslic rovnaly 9 namísto 10, pak by takové číslo neexistovalo. Dokažte. [Připusťme existenci vyhovujícího čísla se zápisem $\overline{abcdefghi}$, a nezastoupenou číslici označme j. Pak platí

$$\begin{aligned}36 = 4 \cdot 9 &= (a+b+c) + (c+d+e) + (e+f+g) + (g+h+i) = \\ &= (a+b+c+d+e+f+g+h+i+j) - j + (c+e+g) = \\ &= 45 - j + (c+e+g) \geqq 45 - 9 + (0+1+2) = 39,\end{aligned}$$

a to je spor.]

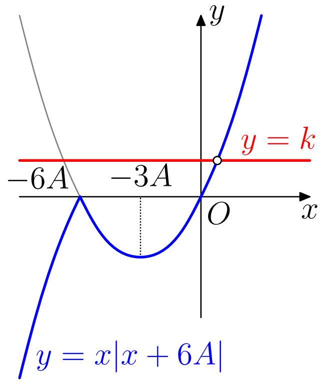
D1. Pětimístné číslo obsahuje každou z číslic 0, 1, 3, 5, 8 právě jednou a součet prvních tří číslic tohoto čísla je roven součtu posledních tří číslic. Určete číslici na místě stovek takového čísla. [Číslice 1. Pro takové číslo $\overline{abcde}$ se stejně jako v úloze N3 odvodí podmínka $a+b = d+e$. Ukážeme, že to při zadaných číslicích to musí být rovnost typu $0+8 = 3+5$ („typu" znamená „až na pořadí sčítanců i obou součtů"). Nejdříve rozhodneme, zda číslice a, b (a tedy číslice d, e) mají stejnou či různou paritu. Protože máme k dispozici dvě sudé číslice 0, 8 a tři liché číslice 1, 3, 5, v případě různých parit číslic v obou dvojicích (a,b) a (d,e) by rovnost $a+b = d+e$ byla typu $0+x = 8+y$ s vhodnými číslicemi $x, y \in \{1,3,5\}$, což je zřejmě spor. V obou dvojicích (a,b) a (d,e) jsou tedy číslice téže parity, takže zřejmě to jsou jednou dvě sudé a jednou dvě liché číslice. Rovnost $a+b = d+e$ je tak nutně typu $0 + 8 = x + y$, kde zřejmě $x = 3$ a $y = 5$. Odtud plyne $\{a,b,d,e\} = \{0,3,5,8\}$. Číslice c na místě stovek tedy nutně musí být „zbylá" číslice 1. Dodejme, že zkoumané pětimístné číslo skutečně existuje, např. to je 80 135.]

D2. Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ s ciferným součtem 12 taková, že $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$. [69–C–I–1]

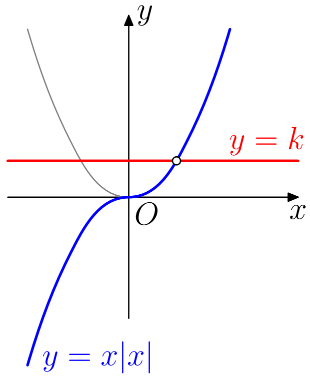
4. *Určete počet reálných kořenů rovnice $x|x+6A| = 36$ v závislosti na reálném parametru A.* (Vojtěch Bálint)

Řešení. Popíšeme nejprve, jak získat graf funkce $f(x) = x|x+6A|$ z grafu kvadratické funkce $g(x) = x(x+6A)$. Její souvislost s funkcí f je zřejmá: Je-li $x \geqq -6A$, je $x+6A \geqq 0$, a proto $|x+6A| = x+6A$, tudíž $f(x) = g(x)$. Je-li naopak $x < -6A$, je $x+6A < 0$, a proto $|x+6A| = -(x+6A)$, tudíž $f(x) = -g(x)$. Na intervalu $\langle -6A, \infty)$ tak grafy obou funkcí f a g splývají. Na „doplňkovém“ intervalu $(-\infty, -6A)$ jsou oba grafy souměrně sdružené podle osy x, takže tuto část grafu f dostaneme, když příslušnou část grafu g „překlopíme“ podle osy x. V dalším odstavci tento postup konkretizujeme.

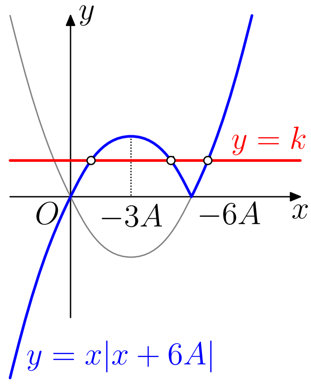
Víme, že grafem kvadratické funkce $g(x) = x(x+6A) = x^2 + 6Ax$ je parabola s osou, kterou je přímka $x = -3A$. Parabola je přitom díky kladnému koeficientu u členu x^2 „rozevřena nahoru“ a protíná osu x v bodech $x = 0$ a $x = -6A$, které v případě $A = 0$ splývají v bod dotyku paraboly s osou x. Tato parabola je na následujících třech obrázcích vykreslena jako šedá čára bez popisku. Modře je pak přikreslen výsledný graf funkce f s popiskem $y = x|x+6A|$.



Případ $A > 0$



Případ $A = 0$



Případ $A < 0$

Naším úkolem je určit počet reálných kořenů rovnice $x|x+6A| = 36$. Geometricky vzato, je to vlastně počet průsečíků grafu funkce f s přímkou o rovnici $y = 36$. Do každého ze tří obrázků je proto už červeně přikreslena i jedna z přímek $y = k$ s (blíže neurčeným) parametrem $k > 0$. Představíme si totiž polohu této přímky pro různé hodnoty k a odtud učiníme potřebné závěry.

Předně z prvních dvou obrázků vidíme, že pro případy $A > 0$ a $A = 0$ je počet průsečíků je roven 1, a to nejen pro $k = 36$, ale pro jakékoli $k > 0$. Z třetího obrázku vychází složitější závěr: Počet průsečíků pro případ $A < 0$ bude 3, 2, nebo 1, a to podle výsledku porovnání hodnoty $k = 36$ s y-ovou souřadnicí vrcholu „modré“ paraboly. Tato souřadnice je rovna hodnotě $f(-3A) = -3A \cdot |-3A + 6A| = 9A^2$. Počet průsečíků tak bude 3, resp. 2, resp. 1, bude-li záporný parametr A splňovat podmínku $36 < 9A^2$, resp. $36 = 9A^2$, resp. $36 > 9A^2$, bude-li tedy platit $A < -2$, resp. $A = -2$, resp. $-2 < A < 0$. Poslední případ můžeme ve shrnující odpovědi spojit do jednoho s dříve vyřešenými případy $A = 0$ a $A > 0$.

Závěr. Pro každé $A < -2$ má rovnice právě tři řešení, pro $A = -2$ právě dvě řešení a pro každé $A > -2$ právě jedno řešení.

JINÉ ŘEŠENÍ. Zadanou rovnici $x|x+6A| = 36$ vyřešíme standardním algebraickým postupem, při kterém se „zbavíme" absolutní hodnoty tím, že rovnici vyřešíme odděleně na intervalech, kde platí $x + 6A > 0$, resp. $x + 6A < 0$. Zbylá možnost $x + 6A = 0$ je tvarem rovnice zřejmě vyloučena.

1. Nechť $x \in (-6A, \infty)$. Řešíme rovnici $x(x+6A) = 36$ neboli $x^2 + 6Ax - 36 = 0$. Pro její diskriminant D platí $D = (6A)^2 + 4\cdot 36 > 0$, takže rovnice má pro každou hodnotu parametru A dva reálné kořeny $x_2 < x_1$ dané vzorci
$$x_{1,2} = \frac{-6A \pm \sqrt{D}}{2}.$$
Díky ostré nerovnosti $D > (6A)^2$ platí i nerovnosti $\sqrt{D} > 6A$ a $\sqrt{D} > -6A$, které po řadě znamenají, že
$$x_2 = \frac{-6A - \sqrt{D}}{2} < -6A \quad \text{a} \quad x_1 = \frac{-6A + \sqrt{D}}{2} > -6A.$$
V uvažovaném oboru $(-6A, \infty)$ má tedy rovnice právě jeden kořen – číslo x_1, ať je hodnota A jakákoli.
2. Nechť $x \in (-\infty, -6A)$. Řešíme rovnici $x(-x-6A) = 36$ neboli $x^2 + 6Ax + 36 = 0$. Její diskriminant D' má hodnotu $D' = (6A)^2 - 4 \cdot 36 = 36(A^2 - 4)$. Pro parametr A nyní musíme rozlišit tři případy:

   (i) Pokud $|A| < 2$, je $D' < 0$ a rovnice tak nemá reálné kořeny.
   (ii) Pokud $|A| = 2$, je $D' = 0$ a rovnice tak má dvojnásobný kořen rovný číslu $-3A$. Ten však leží v uvažovaném oboru $(-\infty, -6A)$, právě když platí $-3A < -6A$ čili $A < 0$. Ze dvou hodnot $A = \pm 2$ to splňuje pouze $A = -2$.
   (iii) Pokud $|A| > 2$, je $D' > 0$ a rovnice tak má dva reálné kořeny $x_4 < x_3$ dané vzorci
   $$x_{3,4} = \frac{-6A \pm \sqrt{D'}}{2}.$$
   Všimněme si, že $\sqrt{D'} = 6\sqrt{A^2 - 4} < 6\sqrt{A^2} = 6|A|$. Rozlišme nyní, zda $A > 2$, nebo zda $A < -2$. Pokud $A > 2$, je $\sqrt{D'} < 6A$, odkud máme
   $$x_3 > x_4 = \frac{-6A - \sqrt{D'}}{2} > -6A,$$
   takže v uvažovaném oboru $(-\infty, -6A)$ nemá rovnice žádný kořen. Pokud $A < -2$, je $\sqrt{D'} < -6A$, odkud máme
   $$x_4 < x_3 = \frac{-6A + \sqrt{D'}}{2} < -6A$$
   takže v našem oboru $(-\infty, -6A)$ má rovnice dva kořeny – obě čísla $x_{3,4}$.

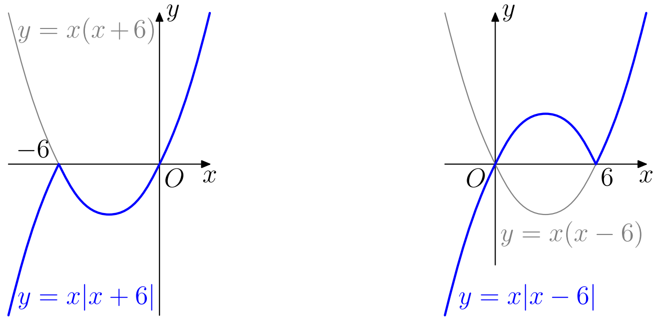
Shrneme-li zjištěné skutečnosti, dojdeme ke stejnému závěru jako u prvního řešení.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Najděte minimum funkce $f(x) = x(x+6)$. [$f(-3) = -9$. Kvadratická funkce s kladným koeficientem u x^2, která má dva reálné kořeny, nabývá svého minima přesně uprostřed mezi těmito kořeny, v daném případě mezi body $x = 0$ a $x = -6$. Lze také využít identitu $x(x+6) = (x+3)^2 - 9$.]

N2. Určete počet řešení rovnice $x(x+6) = K$ v závislosti na reálném parametru K. [Grafem kvadratické funkce na levé straně rovnice je parabola. Dle N1 nabývá tato funkce minimální hodnoty -9. Odtud plyne, že rovnice má pro $K = -9$ jedno řešení, pro $K > -9$ dvě řešení a pro $K < -9$ nemá žádné řešení.]

N3. Načrtněte grafy funkcí $f(x) = x|x+6|$ a $g(x) = x|x-6|$. [



]

D1. V oboru reálných čísel x řešte rovnici $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$, kde a je reálný parametr. [Jak algebraické, tak geometrické řešení najdete na str. 45–50 brožury O rovnicích s parametry ze Školy mladých matematiků.]

D2. Najděte všechny dvojice (a, b) reálných parametrů, pro něž má soustava rovnic $|x| + y = a$, $2|y| - x = b$ právě tři řešení v oboru reálných čísel, a pro každou z nich tato řešení určete. [66–B–I–2]

D3. V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice $|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$ s neznámou x právě tři různá reálná řešení. [52–B–I–6]

D4. Určete nejmenší reálné číslo m, pro něž lze najít reálná čísla a, b tak, aby nerovnost $|x^2 + ax + b| \leqq m$ platila pro každé $x \in \langle 0, 2\rangle$. [65–A–I–2]

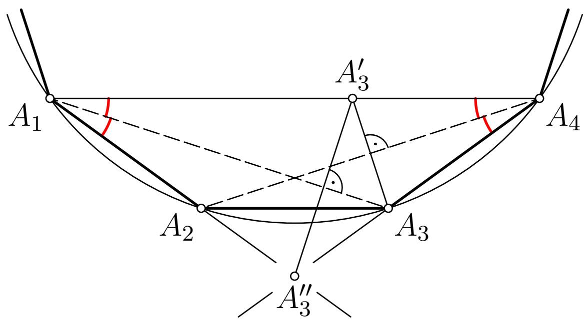
5. *Pravidelný n-úhelník označme $A_1A_2...A_n$. Bod A_3 zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_2A_4, získáme bod A_3'. Pak bod A_3' zobrazíme v osové souměrnosti s osou A_1A_3, získáme bod A_3''. Pro která $n \geqq 4$ je bod A_3'' totožný s průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4?* (Jaroslav Zhouf)

Řešení. Označme S střed kružnice opsané n-úhelníku $A_1A_2...A_n$. Protože středový úhel A_iSA_{i+1} je roven $\frac{360°}{n}$ pro každé $i = 1, \ldots, n-1$, všechny ostré obvodové úhly nad tětivami A_iA_{i+1} mají velikost $\frac{180°}{n}$. Čtyři z nich jsou na obrázku vyznačené červeně. Pro $n = 4$ je součet velikostí těchto 4 červených úhlů roven 180°, a tedy přímky A_1A_2 a A_3A_4 jsou rovnoběžné, což nejmenší hodnotu $n = 4$ vylučuje. Pro dále uvažovaná $n \geqq 5$ je součet velikostí čtyř červených úhlů menší než 180°, tedy průsečík přímek A_1A_2 a A_3A_4 leží na „sbíhajících se" polopřímkách A_1A_2 a A_4A_3 jako na obrázku 1.

Podle dvou shodných červených úhlů u vrcholu A_4 je polopřímka A_4A_2 osou úhlu $A_3A_4A_1$, a tudíž bod A_3' (obraz A_3 v osové souměrnosti podle A_4A_2) leží na polopřímce A_4A_1, a to, jak napovídá obrázek 1 a jak dále bude využito, uvnitř úsečky A_4A_1. Skutečně, potřebná nerovnost $|A_3A_4| < |A_1A_4|$ plyne z trojúhelníku $A_1A_3A_4$, ve kterém díky našemu předpokladu $n \geqq 5$ platí

$$|\sphericalangle A_4A_1A_3| = \frac{180°}{n} < (n-3) \cdot \frac{180°}{n} = 180° - \frac{3 \cdot 180°}{n} = |\sphericalangle A_1A_3A_4|.$$

Podobně nyní ze shodných úhlů u vrcholu A_1 plyne, že bod A_3'' (obraz A_3' v osové souměrnosti podle A_1A_3) leží na polopřímce A_1A_2. Jelikož toto platí pro každé $n \geqq 5$, je naší úlohou zjistit, kdy bod A_3'' leží také na polopřímce A_4A_3, neboli kdy úhel $A_3''A_3A_4$ je přímý.



Obr. 1

Z rovnoramenného trojúhelníku $A_3A_3'A_4$ máme $|\sphericalangle A_3'A_3A_4| = 90° - \frac{180°}{n}$, a proto

$$\begin{aligned}|\sphericalangle A_1A_3A_3'| &= |\sphericalangle A_1A_3A_4| - |\sphericalangle A_3'A_3A_4| = \\ &= \left(180° - \frac{3 \cdot 180°}{n}\right) - \left(90° - \frac{180°}{n}\right) = 90° - \frac{360°}{n}.\end{aligned}$$

Určený úhel $A_1A_3A_3'$ je však shodný se souměrně sdruženým úhlem $A_1A_3A_3''$, takže úhel $A_3''A_3A_3'$ má dvojnásobnou velikost. Máme tak vše připraveno k potřebnému vyjádření úhlu $A_3''A_3A_4$:

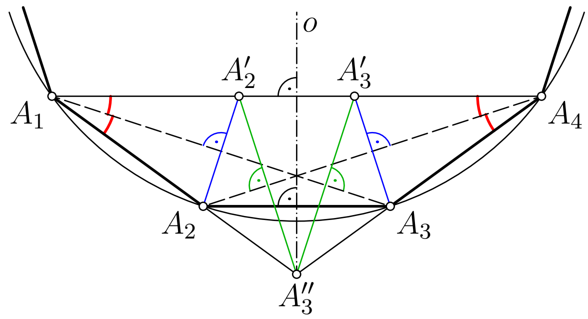
$$\begin{aligned}|\sphericalangle A_3''A_3A_4| &= |\sphericalangle A_3''A_3A_3'| + |\sphericalangle A_3'A_3A_4| = 2 \cdot |\sphericalangle A_1A_3A_3'| + |\sphericalangle A_3'A_3A_4| = \\ &= 2 \cdot \left(90° - \frac{360°}{n}\right) + \left(90° - \frac{180°}{n}\right) = 3 \cdot 90° - \frac{5 \cdot 180°}{n} = \frac{(3n-10) \cdot 180°}{2n}.\end{aligned}$$

Poslední výraz má zřejmě požadovanou hodnotu $180°$, právě když platí $3n - 10 = 2n$ neboli $n = 10$. Tedy pouze při tomto n leží bod A_3'' na obou přímkách A_1A_2 a A_3A_4.

Závěr. Jediné vyhovující číslo n je rovno 10.

Jiné řešení. V první části řešení budeme předpokládat, že bod A_3'' splývá s průsečíkem přímek A_1A_2 a A_3A_4, a ukážeme, že pak nutně $n = 10$.

Nejprve se jako v prvním řešení zdůvodní, že $n \geqq 5$ (jinak zmíněný průsečík neexistuje), že A_3' leží na polopřímce A_4A_1 a že průsečík A_3'' přímek A_1A_2 a A_3A_4 je přesněji průsečíkem polopřímek A_1A_2 a A_4A_3. Uvažme ještě bod A_2', který je obrazem bodu A_2 v souměrnosti s osou A_1A_3, takže leží na polopřímce A_1A_4. Lze dokázat, že body A_2', A_2, A_3'', A_3, A_3' jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníku. Nám však bude stačit ukázat, že se jedná o pětiúhelník s pěti navzájem shodnými vnitřními úhly.*



Obr. 2

Nyní podrobně vysvětlíme, jak je naše situace „symetrická“. Jelikož úhly $A_1A_3A_2$ a $A_3A_1A_4$ jsou shodné, jsou tětivy A_1A_4 a A_2A_3 kružnice k opsané našemu n-úhelníku rovnoběžné. Osy obou tětiv jsou tedy také rovnoběžné a obě prochází středem kružnice k, jsou tedy nutně totožné. Tato společná osa, kterou označíme o, je tedy osou souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku $A_1A_2A_3A_4$, takže na ní leží i průsečík A_3'' polopřímek A_1A_2 a A_3A_4. Podle osy o jsou navíc souměrně sdružené i body A_2' a A_3' (plyne to z jejich konstrukce). Díky tomu jsou body A_2' a A_3'' souměrně sdružené podle přímky A_2A_4. Skutečně, jelikož přímka A_1A_3 je osa úsečky $A_3'A_3''$, po uplatnění souměrnosti s osou o dostaneme totéž pro obraz přímky A_1A_3 a obraz úsečky $A_3'A_3''$, kterými jsou přímka A_2A_4 a úsečka $A_2'A_3''$.

Povšimněme si nyní, že vzdálenost bodu A_4 od osy o je menší nežli délka úsečky A_4A_3'', která je shodná s úsečkou A_4A_2'. Tudíž bod A_2' polopřímky A_4A_1 leží ve stejné polorovině s hranicí o jako bod A_1 (a symetricky bod A_3' ve stejné polorovině jako bod A_4). Tím jsme dokázali, že $A_2'A_2A_3''A_3A_3'$ je skutečně pětiúhelník (jehož hranice sama sebe neprotíná).

Konečně ukážeme, že všechny vnitřní úhly tohoto pětiúhelníku jsou shodné. Shodnost úhlů u vrcholů A_2 a A_2' plyne ze souměrnosti s osou A_1A_3. Z téže souměrnosti plyne i shodnost úhlů u vrcholů A_3'' a A_3'. Podobně ze souměrnosti s osou A_2A_4 získáme shodnost úhlů jak u vrcholů A_3 a A_3', tak u vrcholů A_3'' a A_2'. Tím je dokázáno, že všech pět úhlů má stejnou velikost.

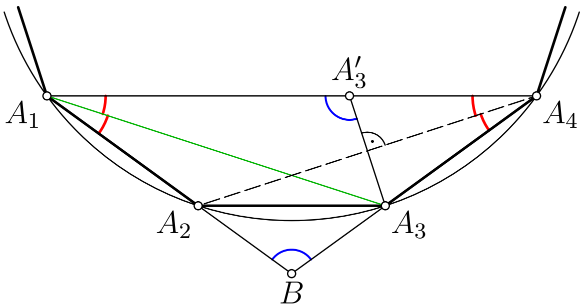
* Takový pětiúhelník je zřejmě pravidelný, pokud mu lze opsat kružnici. V naší situaci je její existence patrná z obrázku 2. Skutečně, pro průsečík P užitých os A_2A_4, A_1A_3 totiž platí $|PA_3| = |PA_3'| = |PA_3''|$ a $|PA_2| = |PA_2'|$; ovšem ze souměrnosti našeho n-úhelníku plyne rovněž $|PA_2| = |PA_3|$, takže P je střed kýžené kružnice.

Jelikož součet vnitřních úhlů libovolného pětiúhelníku je $3\cdot 180°$, mají všechny vnitřní úhly našeho pětiúhelníku velikost $3\cdot\frac{180°}{5} = 3\cdot 36° = 108°$. Užijme to pro úhel $A_2A_3''A_3$ neboli úhel $A_1A_3''A_4$. Z trojúhelníku $A_1A_3''A_4$ tak získáme

$$108° + 4\cdot\frac{180°}{n} = 180°, \quad \text{neboli} \quad \frac{180°}{n} = 18°,$$

a tedy nutně $n = 10$, jak jsme slíbili ukázat.

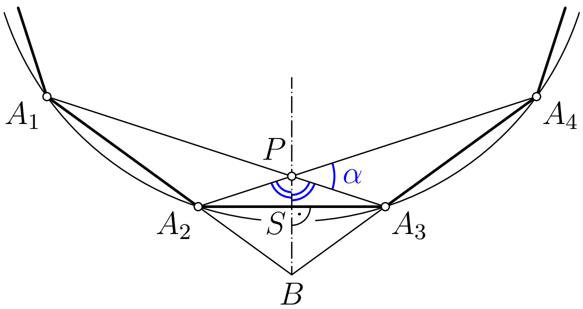
V druhé části řešení dokážeme, že hodnota $n = 10$ skutečně vyhovuje. V pravidelném desetiúhelníku $A_1A_2\ldots A_{10}$ označíme písmenem B průsečík polopřímek A_1A_2 a A_4A_3 a uvážíme bod A_3' ze zadání úlohy (obraz bodu A_3 v souměrnosti s osou A_2A_4), viz obrázek 3.



Obr. 3

Protože velikost červeně označených úhlů je $\frac{180°}{n} = \frac{180°}{10} = 18°$, lze z trojúhelníku A_1BA_4 dopočítat $|\sphericalangle A_1BA_4| = 180° - 4\cdot 18° = 108°$. Z rovnoramenného trojúhelníku $A_3'A_3A_4$ pak získáme $|\sphericalangle A_4A_3'A_3| = \frac{1}{2}(180° - 2\cdot 18°) = 72°$. Velikost vedlejšího úhlu $A_3A_3'A_1$ je tedy $108°$. Proto jsou trojúhelníky $A_3A_1A_3'$ a A_3A_1B podle věty *uu* podobné, a tedy (díky společné straně A_1A_3) shodné. Odtud už plyne, že body B a A_3' jsou souměrně sdružené podle přímky A_1A_3, a tudíž $B = A_3''$, jak jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Nejprve se jako v prvním řešení ukáže, že $n \neq 4$ a že pro každé $n \geqq 5$ se polopřímky A_1A_2 a A_4A_3 protínají. Označme B jejich průsečík, S střed strany A_2A_3 a P průsečík úhlopříček A_1A_3 a A_2A_4.



Obr. 4

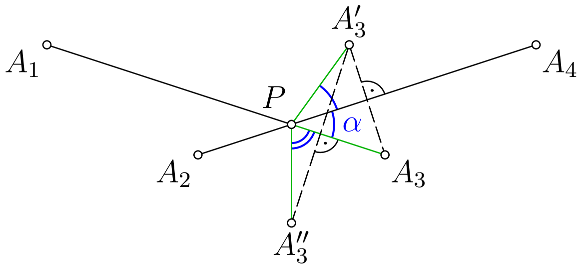
Osa strany A_2A_3 je osou souměrnosti pravidelného n-úhelníku, dvojice přímek A_1A_2, A_3A_4, resp. A_1A_3, A_2A_4 jsou dle ní souměrně sdružené, body P, S, B tak na této ose leží a úhel PSA_3 je pravý.

Je známo, že složení osových souměrností podle přímek A_2A_4 a A_1A_3 je otočení kolem jejich průsečíku P o dvojnásobek úhlu, který tyto přímky svírají; označme $\alpha = |\sphericalangle A_4PA_3|$ jeho velikost. Pokud je bod B obrazem bodu A_3 v tomto otočení, je velikost úhlu A_3PB rovna 2α, ze souměrnosti je velikost úhlu A_2PB rovněž 2α. Přímý úhel A_4PA_2 má tak velikost 5α, proto $\alpha = \frac{180°}{5} = 36°$. Velikost úhlu PA_3S je z pravoúhlého trojúhelníku PSA_3 tudíž rovna $90° - 2\alpha = 18°$.

Stejně jako v prvním řešení si uvědomme, že pravidelný n-úhelník má velikost středového úhlu nad jednou stranou rovnu $\frac{360°}{n}$ a velikost obvodového úhlu nad ní $\frac{180°}{n}$. Dostaneme tak $18° = |\sphericalangle PA_3S| = |\sphericalangle A_1A_3A_2| = \frac{180°}{n}$, odtud nutně $n = 10$.

Nyní dokážeme, že $n = 10$ skutečně vyhovuje zadání úlohy. V pravidelném desetiúhelníku platí $|\sphericalangle A_1A_3A_2| = \frac{180°}{10} = 18°$, z pravoúhlého trojúhelníku PSA_3 je velikost shodných úhlů BPA_3 a BPA_2 rovna $72°$, tedy velikost úhlu A_3PA_4 je $36°$. K tomu, aby bod B byl obrazem bodu A_3 v otočení se středem P o úhel $72°$ (a tedy jeho obrazem ve složení osových souměrností), tak stačí dokázat, že $|PA_3| = |PB|$. Velikost vnějšího úhlu A_2A_3B pravidelného desetiúhelníku je $36°$, tedy velikost úhlu PA_3B je $18° + 36° = 54°$ a z trojúhelníku PA_3B dopočítáme, že velikost úhlu PBA_3 je také $54°$. Tento trojúhelník je tak rovnoramenný se základnou BA_3, což jsme potřebovali ukázat.

Poznámka. V právě podaném řešení jsme se odvolali na obecný výsledek o složení dvou souměrností s navzájem různoběžnými osami. Potvrďme nyní jeho důsledek pro naši situaci přímo.



Obr. 5

Ze zadané konstrukce bodů A_3', A_3'' užitím souměrností s osami A_2A_4, A_1A_3 plyne, že pro průsečík P těchto os platí $|PA_3| = |PA_3'| = |PA_3''|$, že PA_4 je osa úhlu A_3PA_3' a že PA_3 je osa úhlu $A_3'PA_3''$. Proto při užitém označení $\alpha = |\sphericalangle A_4PA_3|$ postupně dostaneme $|\sphericalangle A_3'PA_4| = \alpha$, $|\sphericalangle A_3'PA_3| = 2\alpha$ a $|\sphericalangle A_3PA_3''| = 2\alpha$. Bod A_3'' je tedy obrazem bodu A_3 v otočení se středem P a úhlem 2α, který je orientován stejně jako orientovaný úhel A_4PA_3. To je vše, co jsme v našem řešení potřebovali.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení nejdříve vyloučíme $n = 4$ a pro každé $n \geqq 5$ zdůvodníme existenci průsečíku polopřímek A_1A_2 a A_4A_3, který nyní označíme B. Dále ještě budeme využívat poznatky, že bod A_3' leží na polopřímce A_1A_4 a že A_1A_4B je rovnoramenný trojúhelník, jehož vnitřní úhly při základně A_1A_4 mají velikost $\frac{360°}{n}$.

Máme zjistit, pro která $n \geqq 5$ platí rovnost $B = A_3''$. Tu lze vyjádřit také takto: Bod A_3' polopřímky A_1A_4 splývá s tím bodem polopřímky A_1A_4, který je obrazem bodu B v souměrnosti s osou A_1A_3, tj. který má od bodu A_1 vzdálenost $|A_1B|$. Ekvivalentně řečeno: Bod A_3' leží na úsečce A_1A_4 a platí $|A_1B| = |A_1A_4| - |A_3'A_4|$. Poslední rovnost však sama zaručuje, že $|A_3'A_4| \leqq |A_1A_4|$, a tedy A_3' je bodem úsečky A_1A_4, tudíž s ohledem na $|A_3'A_4| = |A_3A_4|$ můžeme konstatovat: Hledáme právě ta $n \geqq 5$, pro něž platí

$$|A_1B| = |A_1A_4| - |A_3A_4|. \tag{1}$$

V trojúhelníku A_1A_4B označme $z = |A_1A_4|$ a $r = |A_1B| = |A_4B|$. Bod A_3 strany A_4B leží na ose úhlu A_4A_1B, tudíž jak známo* platí

$$|BA_3| : |A_3A_4| = |A_1B| : |A_1A_4| = r : z.$$

Odtud s ohledem na $|BA_3| + |A_3A_4| = r$ snadno určíme délky

$$|BA_3| = \frac{r^2}{r+z} \quad \text{a} \quad |A_3A_4| = \frac{rz}{r+z}.$$

Dosaďme nyní do rovnosti (1) a rovnou ji dále ekvivalentně upravujme:

$$\begin{aligned} r &= z - \frac{rz}{r+z}, \\ r(r+z) &= z(r+z) - rz, \\ z^2 - rz - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Tato kvadratická rovnice s neznámou $z > 0$ a parametrem $r > 0$ má jediný kladný kořen

$$z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot r.$$

Zdůrazněme, že poslední rovnost je pro kladná r, z ekvivalentní s rovností (1). Ta proto bude splněna, právě když (podle úvodního odstavce tohoto řešení) bude platit

$$\cos\frac{360°}{n} = \frac{z}{2r} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Poslední iracionální číslo je však známá hodnota** $\cos 36°$, takže jediná vyhovující hodnota n je zřejmě rovna 10 (neboť funkce kosinus je na intervalu $\langle 0; 90°\rangle$ prostá).

POZNÁMKA. Ukažme, jak lze čtvrté řešení dokončit bez užití funkce kosinus s odkazem na známou hodnotu $\cos 36°$, kterou jinak není tak snadné odvodit.

Po odvození rovnosti $z^2 - rz - r^2 = 0$ ji přepíšeme jako $z(z-r) = r^2$. Poslední vztah podle významu délek r, z znamená právě to, že na úsečce A_1A_4 (délky z) existuje bod B', pro který platí $|A_1B'| = r$ a zároveň

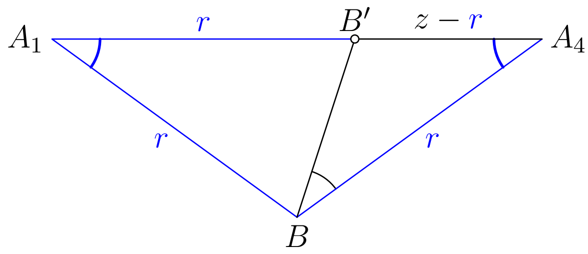
$$|A_1A_4| \cdot |B'A_4| = |BA_4|^2. \tag{2}$$

Ukážeme, že za předpokladu $B' \in A_1A_4$ je délková rovnost (2) ekvivalentní s úhlovou rovností

$$|\sphericalangle BA_1A_4| = |\sphericalangle B'BA_4|. \tag{3}$$

* Plyne to z dvojího vyjádření poměru obsahů trojúhelníků A_1BA_3 a $A_1A_3A_4$: jednou přes totožné výšky z vrcholu A_1 a jednou přes shodné výšky z vrcholu A_3.

** Je uvedena i s odvozením, založeným na úvahách o pravidelném pětiúhelníku, na str. 50–54 knihy Goniometrické funkce v elementární matematice.



Obr. 6

Skutečně, rovnost (2) ve tvaru $|B'A_4| : |BA_4| = |BA_4| : |A_1A_4|$ zaručuje podobnost trojúhelníků $B'A_4B$ a BA_4A_1 podle věty *sus*, zatímco rovnost (3) ji zaručuje podle věty *uu* (viz obrázek 6).*

Hledáme proto právě ta celá $n \geqq 5$, pro která bod B' polopřímky A_1A_4 určený rovností $|A_1B'| = |A_1B|$ leží na úsečce A_1A_4 a splňuje rovnost (3).

Jelikož jak víme $|\sphericalangle BA_1A_4| = |\sphericalangle BA_4A_1| = \frac{360°}{n}$, platí

$$|\sphericalangle A_1BA_4| = 180° - 2 \cdot \frac{360°}{n} = \frac{(n-4)\cdot 180°}{n}$$

a z rovnoramenného trojúhelníku A_1BB' zase vychází

$$|\sphericalangle A_1BB'| = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{360°}{n}\right) = \frac{(n-2)\cdot 180°}{2n}.$$

Odtud předně snadno zjistíme, že nerovnost $|\sphericalangle A_1BA_4| \geqq |\sphericalangle A_1BB'|$ (vyjadřující fakt, že B' je bod úsečky A_1A_4) platí, právě když $n \geqq 6$. Pro taková n pak máme

$$\begin{aligned}|\sphericalangle B'BA_4| &= |\sphericalangle A_1BA_4| - |\sphericalangle A_1BB'| = \\ &= \frac{(n-4)\cdot 180°}{n} - \frac{(n-2)\cdot 180°}{2n} = \frac{(n-6)\cdot 180°}{2n},\end{aligned}$$

takže dosazením do (3) dostáváme rovnici

$$\frac{360°}{n} = \frac{(n-6)\cdot 180°}{2n} \quad \text{čili} \quad 2 = \frac{n-6}{2},$$

které zřejmě vyhovuje jediné $n = 10$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Připomeňte si *větu o středovém a obvodovém úhlu* a její důkaz. [Viz str. 3–4 brožury Kružnice ze Školy mladých matematiků, nebo také komentovaný výklad na `https://www.youtube.com/watch?v=REi-iU55oog`.]

N2. V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2...A_n$ se středem S vyjádřete v závislosti na čísle $n \geqq 7$ velikosti úhlů A_1SA_2, $A_1A_3A_2$, $A_1A_7A_5$. [$|\sphericalangle A_1SA_2| = \frac{360°}{n}$, $|\sphericalangle A_1A_3A_2| = \frac{180°}{n}$ (z věty o středovém a obvodovém úhlu), $|\sphericalangle A_1A_7A_5| = |\sphericalangle A_1A_7A_2| + |\sphericalangle A_2A_7A_3| + |\sphericalangle A_3A_7A_4| + |\sphericalangle A_4A_7A_5| = \frac{720°}{n}$.]

N3. Uvažme pravidelný n-úhelník $A_1A_2...A_n$. Dokažte, že obraz vrcholu A_{k-l} v osové souměrnosti podle přímky A_iA_k leží na přímce A_iA_{k+l}, kdykoli i, k, l jsou přirozená čísla

* Ekvivalence ovšem také plyne okamžitě z mocnosti bodu A_4 ke kružnici opsané trojúhelníku A_1BB' a porovnání jejího obvodového úhlu BA_1A_4 s úsekovým úhlem $B'BA_4$. S těmito pojmy a jejich uplatněním při řešení geometrických úloh se můžete seznámit v brožuře Kružnice ze Školy mladých matematiků.

splňující $l < k < k + l < i \leqq n$. [Podobně jako v N2 ukážeme, že $|\sphericalangle A_{k-l}A_iA_k| = \frac{l\cdot 180^\circ}{n} = |\sphericalangle A_kA_iA_{k+l}|$, a jsme hotovi.]

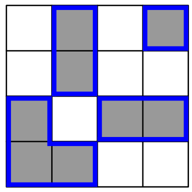
N4. V situaci ze soutěžní úlohy dokažte, že pro každé $n \geqq 5$ leží bod A_3' uvnitř úsečky A_1A_4. [Využijte toho, že polopřímka A_4A_2 je osa úhlu $A_3A_4A_1$ a že $|A_3A_4| < |A_1A_4|$, neboť v trojúhelníku $A_1A_3A_4$ je $|\sphericalangle A_4A_1A_3| < |\sphericalangle A_1A_3A_4|$.]

D1. Určete, pro která celá čísla $n \geqq 3$ platí: V pravidelném n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ se středem S půlí úhlopříčka A_1A_3 úsečku A_2S. [Jediné $n = 6$. $A_1A_2A_3S$ je deltoid, v němž se úhlopříčky navzájem půlí. Je to tedy kosočtverec. Proto $|SA_2| = |SA_1| = |A_1A_2|$, takže SA_1A_2 je rovnostranný trojúhelník, tudíž nutně $n = 6$. Toto n naopak zřejmě vyhovuje, neboť $A_1A_2A_3S$ je tehdy kosočtverec.]

D2. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Přímky AB a CE se protínají v bodě P. Určete velikost úhlu PDG. [90 stupňů. Označme Q průsečík úhlopříček DG a CE. Ze souměrností pravidelného sedmiúhelníku plyne $AB \parallel CG$, $AC \parallel DG$ a $AG \parallel CE$. Proto $APCG$ a $ACQG$ jsou rovnoběžníky, a tudíž shodné úsečky AG, CD jsou rovněž shodné s úsečkami CP a CQ. Bod C je tak středem úsečky PQ a podle Thaletovy věty je úhel PDQ neboli PDG pravý. (CPSJ, 2021)]

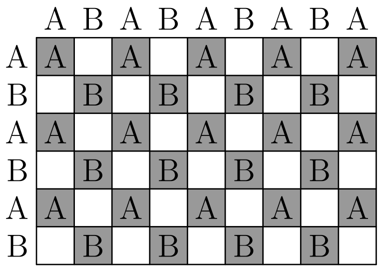
D3. Je dán pravidelný sedmiúhelník $ABCDEFG$. Kolmice vedená bodem D k přímce DE protíná přímky CG a AB po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že $|AQ| + |EF| = |GP|$. [70–B–I–5]

D4. Uvažujme pravidelný 18úhelník $A_1A_2\ldots A_{18}$. Ukažte, že obrazec ohraničený úhlopříčkami A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12} a $A_{10}A_{17}$ je obdélník (nikoli čtverec). [$A_2A_7 \parallel A_{10}A_{17}$ plyne z toho, že $|\sphericalangle A_7A_2A_{10}| = \frac{3}{18}\cdot 180^\circ = |\sphericalangle A_2A_{10}A_{17}|$. Podobně $A_3A_{15} \parallel A_6A_{12}$. Označme X průsečík A_2A_7 s A_6A_{12}. Protože $|\sphericalangle A_2A_7A_6| = \frac{4}{18}\cdot 180^\circ$ a $|\sphericalangle A_7A_6A_{12}| = \frac{5}{18}\cdot 180^\circ$, plyne z trojúhelníku XA_7A_6, že $|\sphericalangle A_6XA_7| = \frac{9}{18}\cdot 180^\circ = 90^\circ$, tj. $A_6A_{12} \perp A_2A_7$. Zatímco vzdálenost stran A_6A_{12}, A_3A_{15} je rovna $|A_{12}A_{15}|$ (neboť úsečka $A_{12}A_{15}$ je na obě strany kolmá, protože je rovnoběžná s A_2A_7), tak vzdálenost zbývajících dvou stran je menší než $|A_{12}A_{15}| = |A_7A_{10}|$, protože úsečka A_7A_{10} na ně kolmá není. (Polsko OMJ/OMG, 2010)]



6. *Je dána šachovnice $m \times n$, jejíž políčka jsou obarvena černě a bíle klasickým způsobem, přičemž levé horní políčko je černé.* Tahem *rozumíme vzájemnou výměnu dvou řádků nebo vzájemnou výměnu dvou sloupců šachovnice.* Skvrnou *rozumíme takovou neprázdnou množinu černých políček, která je tvořena všemi políčky, do nichž lze z jednoho jejího políčka přejít po cestě sestávající ze stranou sousedících černých políček. Například na obrázku je šachovnice 4×4 s právě čtyřmi skvrnami. V závislosti na přirozených číslech m a n určete, kolik nejméně skvrn může být na šachovnici $m \times n$ po provedení konečného počtu tahů.* (David Hruška)

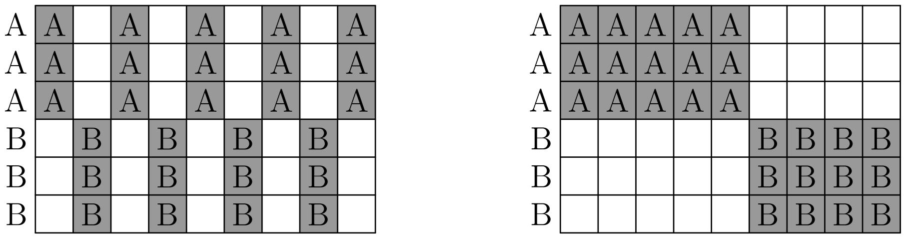
Řešení. V dané šachovnici označíme řádky (shora dolů) i sloupce (zleva doprava), a to v obou případech střídavě písmeny A a B.* Nazveme je „typ“ řádku, resp. sloupce. Všimneme si, že černá políčka jsou právě ta, která leží v průniku řádku a sloupce, které oba mají stejný typ. Podle něho budeme mluvit o (černém) políčku typu A, resp. B. Typy řádků, sloupců a políček výchozí šachovnice jsou vyznačeny na obrázku (rozměry m a n zatím nejsou podstatné).



Obr. 1

Zavedené typy řádků a sloupců s nimi pevně „spojíme“, tj. budeme je při popsaných tazích také přemisťovat. Uvědomme si, že každé políčko nemění při tazích svůj řádek ani svůj sloupec (může v nich pouze změnit své místo). Proto po libovolném počtu tahů platí to, co na začátku: černá políčka jsou právě ta, která leží v průniku řádku a sloupce téhož typu A či B, a tento typ s nimi sdílejí.

Jistě uhodneme, jak na šachovnici dosáhnout „malého“ počtu skvrn: nejprve vzájemnými výměnami řádků dosáhneme toho, aby všechny řádky typu A ležely nad řádky typu B (obrázek 2 vlevo) a poté zařídíme, aby všechny sloupce typu A ležely před sloupci typu B (obrázek 2 vpravo). Do obou obrázků jsme vyznačili rozmístění i typ všech černých políček – využili jsme k tomu výhodně výše zdůvodněné pravidlo.



Obr. 2

* Motivací k takovému značení řádků a sloupců je jednak pravidlo k určování černých polí z konce druhého odstavce řešení, jednak výsledek návodné úlohy N4.

Na šachovnici z obr. 2 vpravo jsou dvě skvrny, v jejím levém horním rohu a v pravém dolním rohu. Tak to dopadne vždy, pokud ovšem řádky i sloupce obou typů existují. V opačném případě, kdy $m = 1$ nebo $n = 1$, bude po našich tazích výsledná skvrna pouze jedna; méně to ovšem být nemůže (černé políčko ze zadání úlohy je vždy prvkem nějaké skvrny), takže tento případ je vyřešen.

Zabývejme se nyní případem, kdy nám zkusmo vyšly skvrny dvě, tj. případem, kdy $m > 1$ a $n > 1$. Proč tehdy nelze nikdy dojít k jediné skvrně na celé šachovnici? Platí totiž obecně to, co vidíme na obou obrázcích: *V každé skvrně, která kdy vznikne, jsou všechna políčka téhož typu A či B.* Toto tvrzení dokážeme sporem: Připusťme, že po určitém počtu tahů vznikne na šachovnici nějaká skvrna, která obsahuje jak políčko typu A, tak políčko typu B. Pak na cestě z černých políček, která taková dvě políčka spojuje, jistě najdeme dvě stranou sousedící políčka taková, že jedno je typu A a druhé typu B. Jejich různý typ však znamená, že neleží ani ve stejném řádku (ten by musel být typu A i B), ani ve stejném sloupci (podobně). To je ale ve sporu s tím, že jde o dvě políčka se společnou stranou. U konce je tak nejen důkaz, ale i celé řešení.

Závěr. V případě, kdy $m = 1$ nebo $n = 1$, je hledaný minimální počet skvrn roven 1. V případě, kdy $m > 1$ a $n > 1$, je hledaný minimální počet skvrn roven 2.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 1×7. [Všechna černá pole lze snadno spojit do jedné skvrny.]

N2. Řešte soutěžní úlohu pro šachovnici 2×2. [Dvě černá pole budou vždy v protilehlých rozích, vždy tedy budou tvořit dvě skvrny.]

N3. V soutěžní úloze pro šachovnici 3×3 ukažte, že její prostřední políčko bude po libovolném počtu tahů tvořit jednoprvkovou skvrnu. [Prostřední políčko bude vždy ve svém řádku i ve svém sloupci jediným černým políčkem, takže nikdy nebude s žádným jiným černým políčkem stranově sousedit.]

N4. V soutěžní úloze pro obecnou šachovnici $m \times n$ najděte všechny dvojice černých políček, která lze konečným počtem tahů přesunout tak, aby spolu sousedila stranou. [Jde o právě ty dvojice černých políček, která leží v jednom řádku nebo v jednom sloupci. Skutečně, leží-li ve stejném řádku (sloupci), vystačíme s jednou vzájemnou výměnou dvou sloupců (řádků). Leží-li naopak ve dvou různých řádcích i dvou různých sloupcích, tak tento fakt se nezmění po žádném tahu.]

D1. V řadě 2021 černých a bílých políček je první černé a každé další má jinou barvu než to předešlé. Jedním krokem rozumíme vzájemnou výměnu jednoho bílého a jednoho černého políčka, která spolu nemusí sousedit. Jaký nejmenší počet kroků potřebujeme, aby černá políčka vytvořila jednu skvrnu? [505 kroků stačí, černá políčka na lichých pozicích 1013 až 2021 přesuneme na sudé pozice 2 až 1010. Méně nestačí, protože původně je skvrn 1011 a každým krokem se počet skvrn zmenší nejvýš o 2 (nejvýš dvě skvrny se spojí do jedné a nejvýš jedna skvrna zanikne, případné změny ostatních skvrn jejich počet nesnižují).]

D2. Uvažujme šachovnici 8×8 s obvyklým obarvením políček. V jednom kroku můžeme „převrátit“ barvy všech políček jednoho řádku, jednoho sloupce nebo jednoho čtverečku 2×2. Můžeme po konečném počtu kroků dojít k šachovnici s jediným černým políčkem? [Ne. Uvědomte si, že počet černých políček se v každém kroku změní o sudý počet, tedy zůstane sudý po libovolném počtu kroků.]