71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

# Úlohy klauzurní části I. kola kategorie B

**1.** Řekneme, že přirozené číslo je *strakaté*, pokud je v jeho dekadickém zápisu každá číslice jiná a všechny součty tří sousedních číslic daného čísla nabývají právě dvou různých hodnot. (Například číslo 162 735 není strakaté, protože posuzované součty $1+6+2=9$, $6+2+7=15$, $2+7+3=12$ a $7+3+5=15$ nabývají tří různých hodnot.)

a) Udejte příklad šestimístného strakatého čísla.

b) Existuje sedmimístné strakaté číslo?

**2.** Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$ s nejdelší stranou $BC$. Uvnitř jeho stran $AB$ a $AC$ leží po řadě body $D$ a $E$ tak, že $|CD|=|CA|$ a $|BE|=|BA|$. Uvažujme dále body $F$ a $G$ tak, že $ABCF$ a $BCAG$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že $|FD|=|GE|$.

**3.** Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran. Jeho obvod je druhá mocnina přirozeného čísla. Také víme, že jedna jeho odvěsna má délku rovnou druhé mocnině prvočísla. Určete všechny možné hodnoty této délky.

Klauzurní část školního kola kategorie B se koná

**v úterý 25. ledna 2022**

tak, aby začala nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Úspěšným řešitelem je ten žák, který získá 10 bodů nebo více. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák klauzurní část distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 14.20.

**1.** *Řekneme, že přirozené číslo je* strakaté*, pokud je v jeho dekadickém zápisu každá číslice jiná a všechny součty tří sousedních číslic daného čísla nabývají právě dvou různých hodnot. (Například číslo* 162 735 *není strakaté, protože posuzované součty* $1 + 6 + 2 = 9$, $6 + 2 + 7 = 15$, $2 + 7 + 3 = 12$ *a* $7 + 3 + 5 = 15$ *nabývají tří různých hodnot.)*

*a) Udejte příklad šestimístného strakatého čísla.*

*b) Existuje sedmimístné strakaté číslo?* (Josef Tkadlec, Martin Melicher)

Řešení. a) Šestimístné strakaté číslo je například 573 482, neboť součty $5 + 7 + 3$, $7 + 3 + 4$, $3 + 4 + 8$, $4 + 8 + 2$ mají právě dvě různé hodnoty 14 a 15.

b) Dokážeme, že žádné sedmimístné strakaté číslo neexistuje.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že takové číslo existuje, vyberme jedno z nich a jeho sedm navzájem různých číslic označme zleva doprava $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$. Navíc jeho trojicím sousedních číslic, kterých je celkem pět, přiřadíme pořadová čísla: první bude trojice $(a, b, c)$, druhá trojice $(b, c, d)$ atd., až pátá bude trojice $(e, f, g)$.

Všimneme si, že součet první trojice je $a + b + c$ a součet druhé trojice je $b + c + d$. Kdyby se tyto dva součty rovnaly, muselo by platit $a = d$, což odporuje tomu, že každá zastoupená číslice je jiná. Součet první trojice je tedy různý od součtu druhé trojice. Ze stejného důvodu musí být různé součty čísel i v každých dvou dalších trojicích, které spolu v naší pětici sousedí (neboť mají vždy dvě čísla společná).

Protože vybrané číslo je strakaté a již součty prvních dvou trojic, označme je $S = a + b + c$ a $R = b + c + d$, jsou navzájem různé, musí podle závěru předchozího odstavce platit: součet třetí trojice je $S$ (sousední druhá trojice má totiž součet $R$), a tak součet čtvrté trojice je zase $R$, a tudíž součet páté trojice je znovu $S$. Zapišme to přehledně do jednoho řádku:

$$a + b + c = S,\ b + c + d = R,\ c + d + e = S,\ d + e + f = R \quad \text{a} \quad e + f + g = S.$$

Vyjádřeme odtud rozdíl $S - R$ jednak z prvních dvou, jednak z posledních dvou rovností:

$$S - R = (a + b + c) - (b + c + d) = a - d,$$
$$S - R = (e + f + g) - (d + e + f) = g - d.$$

Porovnáním dostáváme $a - d = g - d$ neboli $a = g$, přestože $a$ a $g$ jsou navzájem různé číslice. To je definitivní spor, kterým je existence sedmimístného strakatého čísla vyvrácena.

Poznámka. Obě části a) a b) podaného řešení teď odděleně okomentujeme.

a) I když lze na šestimístné strakaté číslo přijít zkusmo, popišme způsob, jak do jeho hledání vnést určitý systém. Pokud si uvědomíme, že součty trojic sousedních číslic musí nabývat střídavě dvou různých hodnot, dojdeme k závěru, že číslice šestimístného strakatého čísla musí být zleva doprava tvaru

$$a,\ b,\ c,\ a + x,\ b - x,\ c + x, \quad \text{kde} \quad x \neq 0. \tag{1}$$

Skutečně, podmínka $x \neq 0$ pro tvar $a + x$ čtvrté číslice musí být splněna, aby se tato čtvrtá číslice nerovnala první číslici $a$. Tvar páté číslice $b - x$ je pak řešením $y$

rovnice $c + (a + x) + y = a + b + c$, tvar šesté číslice $c + x$ pak řešením $z$ rovnice $(a+x)+(b-x)+z = b+c+(a+x)$.

Zdůrazněme, že jsme našli nutné vyjádření $(a, b, c, a+x, b-x, c+x)$ číslic každého šestimístného strakatého čísla. Potřebujeme však ještě, aby taková šestice neobsahovala dvě stejné číslice. Zvolíme-li například $a = 1$ a $x = 1$, dostaneme šestici $(1, b, c, 2, b-1, c+1)$ a vidíme, že $b$ musí být aspoň 4. Volbou $b = 4$ obdržíme šestici $(1, 4, c, 2, 3, c+1)$, která bude zřejmě vyhovovat pro libovolné $c \in \{5, 6, 7, 8\}$. Tak pro $c = 5$ získáme strakaté číslo 145 236.

Dodejme ještě, že šestimístné číslo $\overline{abcdef}$ s navzájem různými číslicemi je strakaté, právě když platí $a - d = e - b = c - f$. Jsou to totiž zjednodušeně zapsané rovnosti

$$(a+b+c) - (b+c+d) = (c+d+e) - (b+c+d) = (c+d+e) - (d+e+f),$$

které vyjadřují právě to, že součty trojic sousedních číslic nabývají střídavě dvou hodnot (jež jsou různé díky $a \neq d$).

b) Po odvození soustavy rovností v podaném řešení

$$a+b+c = S,\ b+c+d = R,\ c+d+e = S,\ d+e+f = R,\ e+f+g = S \qquad (2)$$

lze také dojít ke sporu jinými algebraickými manipulacemi, jakými jsou například porovnávání různých vyjádření hodnot $S$ nebo $R$. Nebudeme je zde uvádět, místo toho objasníme, proč krátké odvození sporné rovnosti $a = g$ v podaném řešení není tak trikové, jak by se na první pohled mohlo zdát.

Budeme-li hledat co nejjednodušší důsledky soustavy rovností (2), nemůžeme pominout možnost odečítat od sebe součty sousedních trojic (dojde totiž ke zrušení dvou sčítanců v každé trojici). Dostaneme tak čtyři různá vyjádření téhož rozdílu $S - R$, totiž

$$S - R = a - d = e - b = c - f = g - d.$$

Tak objevíme spornou rovnost $a - d = g - d$ neboli $a = g$. Nebo jinak: Víme-li z části a) této poznámky, že prvních šest číslic sedmimístného strakatého čísla je nutně tvaru $a$, $b$, $c$, $a + x$, $b - x$ a $c + x$ (viz (1)), musí být sedmá číslice opět rovna $a$, aby se součet páté, šesté a sedmé číslice rovnal $a + b + c$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

A1. Uvedení příkladu šestimístného strakatého čísla (i bez zdůvodnění): 2 body, z toho 1 bod, pokud se příklad nepovede najít, avšak je dosaženo nějaké parametrizace šestice číslic podobně jako v části a) poznámky, nebo jsou odvozeny tamní rovnosti $a - d = e - b = c - f$.

B1. Negativní odpověď na otázku b): 0 bodů.

B2. Volba metody důkazu sporem: 0 bodů.

B3. Zdůvodnění, že sousední trojice mají různé součty: 1 bod.

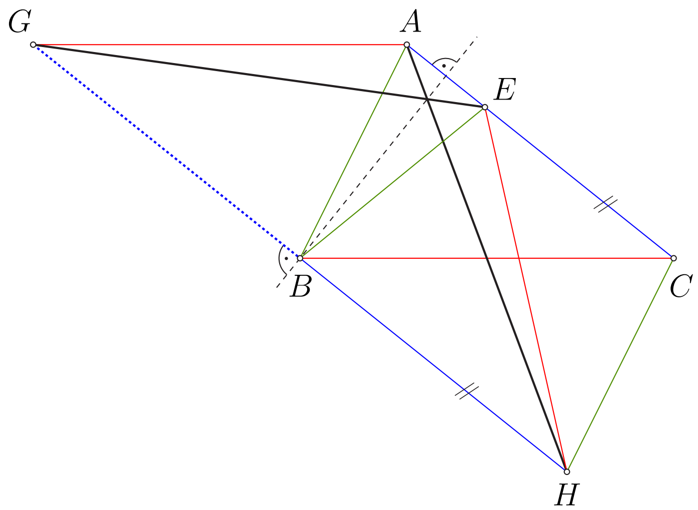
B4. Zdůvodnění, že stejné součty mají první, třetí a pátá trojice a rovněž druhá a čtvrtá trojice: 1 bod.

Celkem pak udělte A1 + B3 + B4 bodů.

**2.** *Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$ s nejdelší stranou $BC$. Uvnitř jeho stran $AB$ a $AC$ leží po řadě body $D$ a $E$ tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Uvažujme dále body $F$ a $G$ tak, že $ABCF$ a $BCAG$ jsou rovnoběžníky. Dokažte, že $|FD| = |GE|$.*

(Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Uvažme ještě bod $H$ takový, že $CABH$ je rovnoběžník. Tvrzení úlohy získáme jako zřejmý důsledek dvou analogických rovností $|HA| = |GE|$ a $|HA| = |FD|$. K důkazu první z nich využijeme obrázek 1 bez vyznačeného bodu $D$.




Obr. 1

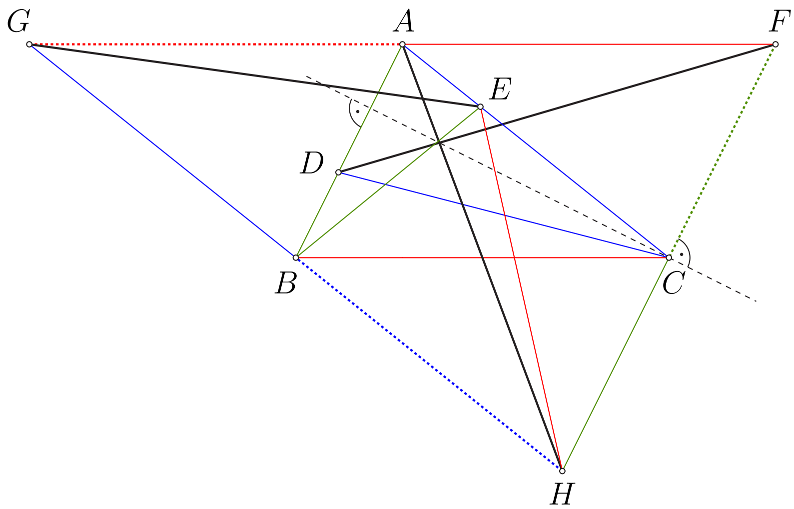
Protože úsečky $GB$ a $BH$ jsou protějšími stranami ke straně $AC$ v rovnoběžnících $GBCA$, resp. $BHCA$, jsou úsečky $GB$, $AC$ a $BH$ shodné a rovnoběžné. Bod $B$ je tudíž středem úsečky $GH$ a navíc platí $GH \parallel AC$, a tedy i $GH \parallel AE$. Jelikož $ABE$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou $AE$, leží jeho hlavní vrchol $B$ na ose základny $AE$. Tato osa je však i osou úsečky $GH$ (je totiž na ni kolmá a prochází jejím středem). Podle této společné osy je tedy souměrný lichoběžník $GHEA$, který je tudíž rovnoramenný. Protože úhlopříčky rovnoramenného lichoběžníku jsou shodné, je avizovaná rovnost $|HA| = |GE|$ dokázána.*

Stejným způsobem se dokáže, že také úsečky $AD$ a $FH$ mají společnou osu (neboli $FADH$ je rovnoramenný lichoběžník, viz obrázek 2, odkud vyplyne druhá potřebná rovnost $|HA| = |FD|$. Tím je podle úvodního odstavce celé řešení hotovo.

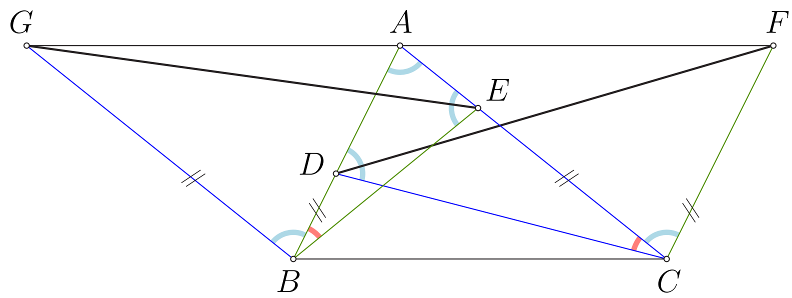
JINÉ ŘEŠENÍ. Ukážeme, že trojúhelníky $GBE$ a $DCF$ jsou shodné podle věty *sus*, uplatněné k dvojicím jejich stran se společným vrcholem $B$, resp. $C$ – viz obrázek 3. Tak budeme s řešením hotovi, neboť shodnost třetích stran $GE$ a $DF$ je právě tím tvrzením, které máme dokázat.

Začněme s důkazem shodnosti úhlů $GBE$ a $DCF$. K tomu budeme shodné úhly na obrázku vyznačovat obloučky téže barvy. Nejdříve porovnáme všechny vnitřní úhly rovnoramenných trojúhelníků $ADC$ a $EAB$. Ty při jejich základnách $AD$, resp. $EA$ jsou

* Řešení lze zakončit i bez zmínky o rovnoramenném lichoběžníku: Podle společné osy úseček $AE$ a $GH$ jsou totiž úsečky $HA$ a $GE$ souměrně sdružené, a tudíž shodné.



Obr. 2



Obr. 3

na obrázku všechny vyznačeny modře, neboť pro jejich velikosti platí:

$$|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle BEA|.$$

Odtud plyne také shodnost zbývajících vnitřních úhlů $DCA$ a $ABE$, vyznačených na obrázku červeně. Kromě nich jsou tam ještě vyznačeny modře úhly $GBA$ a $ACF$, které jsou totiž střídavé (a tudíž shodné) s úhlem $CAB$ díky tomu, že $GB \parallel AC$ a $AB \parallel FC$. Teď už vidíme, že platí

$$|\sphericalangle GBE| = |\sphericalangle GBA| + |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ACF| + |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCF|,$$

jak jsme měli dokázat.

Zbývá dokázat, že jsou shodné jak strany $GB$ a $DC$, tak i strany $BE$ a $CF$. To je ale snadné, neboť $|GB| = |AC| = |DC|$ (první rovnost plyne z rovnoběžníku $GBCA$, druhá z definice bodu $D$) a $|BE| = |BA| = |CF|$ (zde první rovnost plyne z definice bodu $E$ a druhá z rovnoběžníku $ABCF$). Tím je důkaz shodnosti trojúhelníků $GBE$ a $DCF$, který jsme slíbili v úvodním odstavci, ukončen.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

A1. Přikreslení třetího rovnoběžníku $CABH$: 1 bod.

A2. Konstatování, že $GHEA$ a $HFAD$ jsou rovnoramenné lichoběžníky (případně čtyřúhelníky se souměrně sdruženými úhlopříčkami): bez důkazu 2 body, s důkazem 4 body.

B1. Hypotéza o shodnosti $\triangle GBE \cong \triangle DCF$ (dále jen „hypotéza“): 0 bodů.

B2. Zdůvodněné rovnosti $|GB| = |DC|$ a $|GB| = |CF|$ (bez hypotézy): 0 bodů.
B3. Zdůvodněná shodnost úhlů $GBE$ a $DCF$ (bez hypotézy): 0 bodů.
B4. Hypotéza a zdůvodněné rovnosti $|GB| = |DC|$ a $|BE| = |CF|$: 2 body, z toho 1 bod za jednu rovnost.
B5. Hypotéza a zdůvodněná shodnost úhlů $GBE$ a $DCF$: 3 body.

Celkem pak udělte max (A1, A2, B4 + B5) bodů.

**3.** *Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran. Jeho obvod je druhá mocnina přirozeného čísla. Také víme, že jedna jeho odvěsna má délku rovnou druhé mocnině prvočísla. Určete všechny možné hodnoty této délky.* (Patrik Bak)

ŘEŠENÍ. Hledáme všechna prvočísla $p$, pro která existuje popsaný trojúhelník s délkou jedné odvěsny $p^2$. Délku jeho druhé odvěsny označme $b$ a délku přepony $c$. Pak podle Pythagorovy věty platí rovnost $c^2 = p^4 + b^2$, kterou upravíme do součinového tvaru

$$p^4 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b). \tag{1}$$

Protože $c > b > 0$ (přepona je delší než odvěsna), stojí na pravé straně (1) součin dvou přirozených čísel $c+b$ a $c-b$, přičemž $c+b > c-b$. Číslo $p^4$ z levé strany (1) lze ovšem rozložit na součin dvou různých přirozených čísel právě dvěma způsoby (když větší činitel zapíšeme jako první): $p^4 \cdot 1$ a $p^3 \cdot p$. Tedy součet $c+b$ je roven buď $p^4$, nebo $p^3$. V prvním případě má obvod $o = p^2 + b + c$ našeho trojúhelníku hodnotu $o = p^2 + p^4$, ve druhém případě je $o = p^2 + p^3$.

Podle zadání je obvod $o$ druhou mocninou přirozeného čísla. Kdyby taková byla hodnota $p^2 + p^4 = p^2(p^2+1)$, pak s ohledem na činitel $p^2$ by musel být druhou mocninou i o jedničku větší činitel $p^2+1$, což je zjevně nemožné – je to číslo o $2p$ menší než kvadrát $(p+1)^2$, který po kvadrátu $p^2$ následuje.*

Musí tedy nastat druhý případ, kdy je druhou mocninou hodnota $o = p^2 + p^3 = p^2(p+1)$. To nastane, právě když bude druhou mocninou činitel $p+1$, což splňuje, jak vzápětí ukážeme, jediné prvočíslo $p = 3$. Skutečně, z rovnosti $p + 1 = k^2$ pro celé $k > 1$ máme $p = (k-1)(k+1)$, odkud vzhledem k $0 < k-1 < k+1$ plyne $k-1 = 1$ a $k+1 = p$, tj. $k = 2$ a $p = 3$.

Zjistili jsme, že v úvahu připadá jediné prvočíslo $p = 3$, přitom musí platit $c + b = p^3 = 27$ a $c - b = p = 3$, odkud $c = 15$ a $b = 12$. Trojúhelník se stranami délek 15, 12 a 9 $(=p^2)$ je skutečně pravoúhlý a jeho obvod 36 je druhou mocninou čísla 6.**

*Závěr*. Délka odvěsny rovné druhé mocnině prvočísla má jedinou možnou hodnotu, kterou je číslo 9.

POZNÁMKA. Zachovejme označení $p$, $b$, $c$, $o$ a stručně popišme jiné, poněkud komplikovanější řešení. Tentokrát rovnost $p^4 + b^2 = c^2$ upravíme do součinového tvaru $b^2 = \big(c+p^2\big)\big(c-p^2\big)$. Zdůrazněme, že zde (obecně vzato soudělná) čísla $c + p^2$ a $c - p^2$ nemusí být kvadráty (i když jejich součin takový je). Pokud ovšem uvážíme jejich největší společný dělitel $d$, budeme mít $c + p^2 = du^2$, $c - p^2 = dv^2$, $b = duv$ a $o = du(u+v)$, kde $u > v$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Nyní z rovností

$$2p^2 = \big(c+p^2\big) - \big(c-p^2\big) = du^2 - dv^2 = d\big(u^2 - v^2\big)$$

vidíme, že $d$ je dělitel čísla $2p^2$, který je přitom menší než $p^2$, neboť jistě $u^2 - v^2 > 2$. Máme tak nutně $d \in \{1, 2, p, 2p\}$. Tyto hodnoty lze jednotlivě posoudit dosazením do rovnosti

* Zřejmé tvrzení, že dvě po sobě následující přirozená čísla nemohou být obě druhými mocninami, nemusí řešitelé v protokolech dokazovat.

** Prověrka těchto dvou vlastností *v uvedeném postupu* není nezbytná: máme zaručenu rovnost z Pythagorovy věty a víme, že obvod $p^2(p+1)$ je druhou mocninou, protože je takové číslo $p + 1 = 4$.

$2p^2 = d(u+v)(u-v)$. Z ní pak vždy určíme činitele $u+v$ a $u-v$.* Zapišme to zde pouze pro hodnotu $d = 2p$ (která jediná nevede ke sporu): Pro ni dostaneme $(u+v)(u-v) = p$, takže $u-v = 1$ a $u+v = p$. Když odtud plynoucí hodnoty $u$, $v$ dosadíme spolu s $d = 2p$ do vzorce $o = du(u+v)$, dostaneme po úpravě $o = p^2(p+1)$ a postup snadno dokončíme stejně jako v původním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

A1. Odvození rovnice (1) (v součinovém tvaru!): 1 bod.
A2. Odvození závěru, že $b+c \in \{p^4, p^3\}$: 1 bod.
A3. Vyloučení případu $b+c = p^4$: 1 bod.
A4. Odvození, že v případě $b+c = p^3$ platí $p = 3$: 2 body.
A5. Ověření, že hodnota $p = 3$ (třeba i uhodnutá) vyhovuje: 1 bod.
B1. Odvození rovnice $b^2 = (c+p^2)(c-p^2)$: 0 bodů.
B2. Pozorování, že největší společný dělitel činitelů $c+p^2$, $c-p^2$ (z rovnice v B1) je dělitel čísla $2p^2$, tj. jedna z hodnot 1, 2, $p$, $2p$, $p^2$, $2p^2$: 1 bod.
B3. Vyloučení hodnot 1, 2, $p$, $p^2$, $2p^2$ z bodu B2: 3 body
B4. Vyřešení případu s hodnotou $2p$ z bodu B2 (včetně zkoušky): 2 body

Celkem pak udělte $\max(\mathrm{A1} + \mathrm{A2} + \mathrm{A3} + \mathrm{A4} + \mathrm{A5}, \mathrm{B2} + \mathrm{B3} + \mathrm{B4})$ bodů.

Řešení, které neobsahuje požadovaný závěr, že totiž jediná možná délka dotyčné odvěsny je 9, může být ohodnoceno nejvýše 5 body.

* Pro hodnoty $d = 1$ a $d = 2$ si přitom vypomůžeme poznatkem, že díky nesoudělnosti čísel $u$, $v$ mohou mít čísla $u+v$, $u-v$ jediného společného dělitele většího než 1, totiž číslo 2.