71. ročník Matematické olympiády (2021/2022)

Úlohy krajského kola kategorie C

1. Dokažte, že pro libovolná celá čísla a, b platí nerovnost

$$a(a+1)+b(b-1) \geqq 2ab.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastává rovnost.

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$ a na jeho hranici body X a Y různé od bodu A tak, že přímky AX a AY dělí tento rovnoběžník na tři části se stejným obsahem. Určete poměr obsahu trojúhelníku AXY a obsahu rovnoběžníku $ABCD$.

3. Na tabuli je napsáno jedno nebo několik různých dvojmístných přirozených čísel. Číslici c na tabuli nazveme *dobrou*, je-li součet těch čísel z tabule, která obsahují číslici c, roven číslu 71. (Může někdy jít o „součet“ rovný jedinému číslu s danou číslicí.)

a) Které z číslic 0 až 9 mohou být dobré?

b) Kolik nejvíce číslic může být současně dobrých?

4. Tabulka 10×10 je vyplněna čísly 1 a -1 tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven stejnému číslu s. Určete největší možnou hodnotu s a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určenou největší hodnotou s.

Krajské kolo kategorie C se koná

v úterý 5. dubna 2022

tak, aby začalo nejpozději v 10 hodin dopoledne a aby soutěžící měli na řešení úloh 4 hodiny čistého času. Za každou úlohu může soutěžící získat 6 bodů; hodnotí se přitom nejen správnost výsledku, ale i logická bezchybnost a úplnost sepsaného postupu, výsledky všech potřebných písemných nebo pamětných výpočtů musí být zaznamenány. Bodová hranice k určení úspěšných řešitelů bude stanovena centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. Povolené pomůcky jsou psací a rýsovací potřeby a školní MF tabulky. Kalkulačky, notebooky ani žádné jiné elektronické pomůcky dovoleny nejsou. Tyto údaje se žákům sdělí před zahájením soutěže.

Řeší-li žák krajské kolo distančně, smí použít počítač (tablet, telefon) pouze ke své nepřetržité kontrole, k zobrazení zadání, případně k položení dotazu učiteli a získání odpovědi. Žák musí svá nafocená či naskenovaná řešení odevzdat do 14.20.

1. *Dokažte, že pro libovolná celá čísla a, b platí nerovnost*

$$a(a+1)+b(b-1) \geqq 2ab.$$

Zjistěte rovněž, kdy nastává rovnost. (Jaromír Šimša)

Řešení. Zadanou nerovnost postupně ekvivalentně upravujeme

$$\begin{aligned} a(a+1)+b(b-1) &\geqq 2ab, \\ (a^2+a)+(b^2-b)-2ab &\geqq 0, \\ (a^2-2ab+b^2)+(a-b) &\geqq 0, \\ (a-b)^2+(a-b) &\geqq 0, \\ (a-b)(a-b+1) &\geqq 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost posoudíme pro celá čísla a a b ve dvou případech.

a) Je-li $a \geqq b$, pak $a-b \geqq 0$, a tedy i $a-b+1>0$, takže dohromady máme $(a-b)(a-b+1) \geqq 0$ s rovností právě pro $a=b$.

b) Je-li naopak $a<b$, pak $a-b<0$, což pro celé číslo $a-b$ znamená, že $a-b \leqq -1$ neboli $a-b+1 \leqq 0$. Spolu s $a-b<0$ tak máme $(a-b)(a-b+1) \geqq 0$ s rovností právě pro $a=b-1$.

Důkaz nerovnosti je tedy hotov a rovnost nastane, právě když pro celá čísla a, b platí $a=b$ nebo $a=b-1$.

Poznámky.

1. Potřebnou úpravu nerovnosti i následnou diskuzi lze provést také tak, že uvážíme celé číslo $x=a-b$. Dosadíme-li pak $a=b+x$ do zadané nerovnosti, po roznásobení a zrušení stejných členů na obou stranách nám zůstane nerovnost $x^2+x \geqq 0$ neboli $x(x+1) \geqq 0$ a dokončení je snadné.
2. Uveďme ještě malou obměnu druhé části podaného řešení. Z upravené nerovnosti $(a-b)(a-b+1) \geqq 0$ ihned vidíme, že i v původní nerovnosti nastane rovnost právě ve dvou případech: $a=b$ a $a=b-1$. Nenastane-li žádný z nich, nebude celé číslo a rovno žádnému ze dvou sousedních celých čísel $b-1$ a b, takže bude platit buď $a>b$, nebo $a<b-1$. V každém z těchto případů budou mít oba činitelé $a-b$, $a-b+1$ stejné znaménko a jejich součin tak bude kladný.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V případě částečných řešení udělte:

- 2 body za úpravu nerovnosti na součinový tvar $(a-b)(a-b+1) \geqq 0$, případně na tvar $x^2+x \geqq 0$ po zavedení substituce $x=a-b$.
- 2 body za vyřešení případu $a \geqq b$, resp. $x \geqq 0$.
- 2 body za vyřešení případu $a<b$, resp. $x<0$.

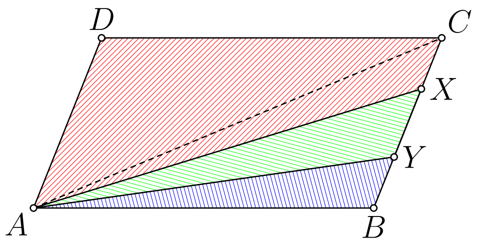
Dva body z první položky lze udělit i za úpravu do tvaru jako je $(a-b)^2+(a-b) \geqq 0$ či $(b-a)^2 \geqq b-a$, pokud ovšem žák dále dokáže i s takovou nerovností vyřešit *oba* případy $a \geqq b$ a $a<b$ (pak ale jde o úplné řešení). Vyřeší-li s ní pouze jeden případ $a \geqq b$, resp. $a<b$, udělte celkem 2, resp. 3 body.

V každém z obou uvedených případů lze strhnout po 1 bodu za drobné nedostatky v nerovnostní argumentaci. Pokud řešitel vyčlení triviální případ $a=b$ samostatně, za ten žádný bod neudělujte, hodnoťte ho společně s případem $a>b$. V případě chybné analýzy případů rovnosti strhněte dohromady nejvýše 1 bod. Chybí-li zmínka o ekvivalentnosti úprav, body nestrhávejte, jsou-li úpravy zřejmé jako v našem řešení. Za pouhé uhodnutí *obou* případů rovnosti ($a=b$ a $a=b-1$) udělte 1 bod, který ovšem nelze přičíst ke 2 bodům za úpravu nerovnosti z první položky pokynů.

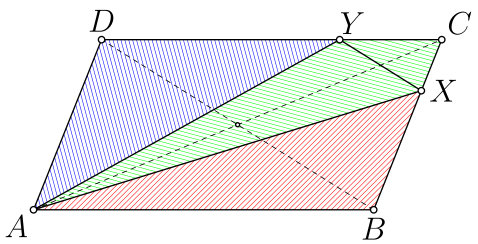
2. *Je dán rovnoběžník $ABCD$ a na jeho hranici body X a Y různé od bodu A tak, že přímky AX a AY dělí tento rovnoběžník na tři části se stejným obsahem. Určete poměr obsahu trojúhelníku AXY a obsahu rovnoběžníku $ABCD$.* (David Hruška)

ŘEŠENÍ. Aby přímky AX a AY rozdělovaly rovnoběžník $ABCD$ na tři části, musí být zřejmě body X a Y navzájem různé a žádný z nich nemůže ležet ani na straně AB, ani na straně AD. Každý z nich tedy leží na straně BC nebo CD. Zdůvodněme v dalším odstavci, že jeden z bodů X, Y musí ležet uvnitř strany BC a druhý uvnitř strany CD, když podle zadání všechny tři části rozděleného rovnoběžníku mají ve srovnání s ním třetinový obsah.

Protože úhlopříčka AC půlí obsah rovnoběžníku $ABCD$, žádná ze tří částí s třetinovým obsahem nemůže obsahovat ani celý trojúhelník ABC, ani celý trojúhelník ACD. Kdyby však oba body ležely na straně BC jako na obrázku, jedna ze tří částí by obsahovala celý trojúhelník ACD. Stejně tak se vyloučí případ, kdy oba body X, Y leží na straně CD.



Protože označení X a Y můžeme navzájem vyměnit, budeme dále předpokládat, že bod X leží uvnitř strany BC a bod Y uvnitř strany CD. Rovnoběžník $ABCD$ je pak rozdělen na dva trojúhelníky ABX, AYD a čtyřúhelník $AXCY$.



Označme S obsah celého rovnoběžníku $ABCD$. Podle zadání pro obsahy trojúhelníků ABX a AYD platí $S_{ABX} = S_{AYD} = S/3$. Jelikož trojúhelníky ABX a ABC mají společnou výšku z vrcholu A, délky protějších stran jsou v poměru

$$|BX| : |BC| = S_{ABX} : S_{ABC} = (S/3) : (S/2) = 2 : 3,$$

odkud $|BX| = \frac{2}{3}|BC|$, takže $|CX| = \frac{1}{3}|BC|$. Podobně porovnáním trojúhelníků AYD a ACD obdržíme $|CY| = \frac{1}{3}|CD|$. Dohromady dostáváme, že podle věty *sus* jsou trojúhelníky CXY a CBD podobné v poměru $1 : 3$. Pro obsah prvního z nich tudíž platí

$$S_{CXY} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot S_{CBD} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{18}.$$

Čtyřúhelník $AXCY$ má rovněž obsah $S/3$ a je složen z trojúhelníků AXY a CXY. Obsah druhého z nich už známe, takže první z nich má obsah

$$S_{AXY} = \frac{S}{3} - S_{CXY} = \frac{S}{3} - \frac{S}{18} = \frac{5S}{18}.$$

Závěr. Hledaný poměr obsahů je roven $5 : 18$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V případě částečných řešení udělte:

- 1 bod za vyloučení případu, kdy oba body X a Y leží na jedné ze stran BC nebo CD.
- 2 body za určení aspoň jednoho z poměrů, v jakém body X, Y dělí příslušnou ze stran BC, resp. CD.
- 2 body za výpočet poměru obsahu trojúhelníka CXY k obsahu rovnoběžníka $ABCD$.

Absenci vyloučení poloh bodů X a Y na stranách AB a AD nepenalizujte. Nepenalizujte ani opomenutí případů, kdy X nebo Y splývá s jedním z vrcholů B, C, D. Jeden bod však strhněte, chybí-li vysvětlení, proč oba body X a Y nemohou ležet na téže ze stran BC, AD.

3. *Na tabuli je napsáno jedno nebo několik různých dvojmístných přirozených čísel. Číslici c na tabuli nazveme* dobrou*, je-li součet těch čísel z tabule, která obsahují číslici c, roven číslu* 71. *(Může někdy jít o „součet" rovný jedinému číslu s danou číslicí.)*

a) Které z číslic 0 *až* 9 *mohou být dobré?*

b) Kolik nejvíce číslic může být současně dobrých? (Josef Tkadlec)

Řešení. a) Následující příklady vždy jednoho nebo dvou čísel napsaných na tabuli ukazují, že číslice 1, 2, 3, 4, 5, 7 mohou být dobré.[?]

$$\begin{aligned} 1&: \{71\},\\ 2&: \{29, 42\},\\ 3&: \{32, 39\},\\ 4&: \{24, 47\},\\ 5&: \{15, 56\},\\ 7&: \{71\}. \end{aligned}$$

Ukažme, že žádná ze zbylých číslic 0, 6, 8 a 9 nemůže být nikdy dobrá. Dokážeme to pro ně jednotlivě, budeme přitom vždy mluvit o výskytech dané číslice v číslech na tabuli.

- Číslice 0 může být pouze na místech jednotek. Ale součet takových čísel vždy končí číslicí 0, a ne požadovanou číslicí 1.
- Kdyby byly číslice 6 pouze na místech jednotek, byl by součet čísel s číslicí 6 sudý, a tedy různý od 71. Mějme tedy aspoň jedno číslo tvaru $6_\sqcup$. Pro ně však platí $6_\sqcup < 71 < 60 + 16$, takže součet 71 nelze získat.
- Číslice 8 je příliš velká na to, aby byla někde na místě desítek. Musí tedy všude být na místech jednotek, součet takových čísel je však sudý.
- Číslice 9 může být (ze stejného důvodu jako číslice 8) pouze na místě jednotek. Aby součet takových čísel končil na 1, museli bychom jich sečíst aspoň 9, ale $9 \cdot 19 > 71$.

Závěr části a). Dobré mohou být právě číslice 1, 2, 3, 4, 5 nebo 7.

b) Dokážeme nejprve, že všechny v úvahu připadající číslice 1, 2, 3, 4, 5 a 7, kterých je celkem 6, nemohou být dobré současně. K tomu stačí ukázat, že dobré nemohou být současně číslice 4 a 7.

Zkoumejme tedy, kdy je číslice 4 dobrá. Protože číslo 71 je liché, všechna sčítaná čísla nemohou mít číslici 4 na místě jednotek. Aspoň jedno číslo tak má číslici 4 na místě desítek, navíc dvě taková čísla zřejmě existovat nemohou. Máme tedy právě jedno číslo začínající na 4 a k tomu alespoň jedno číslo končící na 4. I toto číslo je však jediné, neboť $41 + 14 + 24 > 71$. Nutně tak máme (na tabuli) právě dvě čísla s číslicí 4, totiž $4_\sqcup$ a $_\sqcup 4$, a jejich součet je 71. Jde jistě o čísla 47 a 24.

[?] Lze dokázat, že k číslicím 1, 2 a 3 existuje po řadě 43, 11 a 5 příkladů vyhovujících množin dvojmístných čísel s dotyčnou číslicí. U ostatních vypsaných číslic 4, 5 a 7 jsou uvedené příklady jediné možné. Pro číslice 4 a 7 to zdůvodníme v části b) řešení, pro číslici 5 to lze udělat podobně snadno.

Předpokládejme nyní, že je dobrá číslice 7. Kdyby se vyskytovala pouze na místech jednotek, muselo by tak tomu být v aspoň 3 číslech, aby jejich součet končil číslicí 1, avšak $17+27+37>71$. Dobrá číslice 7 se tak někde vyskytuje na místě desítek – tehdy je na tabuli zřejmě jediné číslo s číslicí 7, totiž číslo 71.

Z posledních dvou odstavců už plyne to, co jsme slíbili ukázat: číslice 4 a 7 nemohou být současně dobré – na tabuli by musela současně být čísla 47, 24 a 71, takže číslice 7 by nebyla dobrá. Podle úvodu z části b) to znamená, že počet dobrých číslic na tabuli je vždy nejvýše 5 a že kandidáty na pětici současně dobrých číslic jsou pouze pětice $(1,2,3,4,5)$ a $(1,2,3,5,7)$. Zadání úlohy splníme, pokud uvedeme *jeden* příklad čísel na tabuli s pěti dobrými číslicemi. Pro zajímavost uvedeme takové příklady *čtyři*, všechny pro první pětici $(1,2,3,4,5)$:

$$\begin{aligned}
\{10,11,15,16,19\}\cup\{20,24,27\}\cup\{33,38\}\cup\{24,47\}\cup\{15,56\},\\
\{10,11,15,17,18\}\cup\{20,24,27\}\cup\{33,38\}\cup\{24,47\}\cup\{15,56\},\\
\{15,16,19,21\}\cup\{21,24,26\}\cup\{33,38\}\cup\{24,47\}\cup\{15,56\},\\
\{15,17,18,21\}\cup\{21,24,26\}\cup\{33,38\}\cup\{24,47\}\cup\{15,56\}.
\end{aligned}$$

Závěr části b). Největší možný počet současně dobrých číslic je roven 5.

Poznámka. Vysvětlíme nejdříve, proč žádný příklad čísel s pěticí dobrých číslic $(1,2,3,5,7)$ neexistuje. V druhé části poznámky pak alespoň naznačíme, jak se dobrat k některému příkladu s pěticí dobrých číslic $(1,2,3,4,5)$. (Bez důkazu ponecháme fakt, že v závěru našeho řešení jsme vypsali všechny čtyři možné příklady.)

Není těžké dokázat, že číslice 5 je dobrá, jen když vystupuje ve dvou číslech, totiž 15 a 56. Pokud je proto zároveň dobrá i číslice 7, jsou na tabuli čísla 15, 56 a 71, tudíž číslice 1 není dobrá a první vytčený cíl je splněn.

Ke konstrukci příkladu pro pětici $(1,2,3,4,5)$: Víme už, že na tabuli musí být s číslicí 4 nebo 5 právě čísla 24, 47, 15 a 65. Analýzou čísel s číslicí 3 lze najít pět v úvahu připadajících možností $\{32,39\},\{33,38\},\{34,37\},\{35,36\},\{13,23,35\}$. Poslední tři z nich hned vyloučíme kvůli přítomnosti číslic 4 nebo 5. První možnost $\{32,39\}$ vede k problému s číslicí 2 – vyjádřit její „deficit" $71-24-32=15$ nelze. Číslice 3 tak bude nutně zastoupena právě v číslech 33 a 38. Následně zkoumáním zastoupení číslice 2 dojdeme ke dvěma možnostem: k číslu 24 přidat $\{20,27\}$ nebo $\{21,26\}$. V obou případech zbývá analyzovat číslici 1, přičemž při přidání $\{21,26\}$ je to jednodušší – hledáme tam totiž vyjádření „deficitu" $71-21-15=35$, pro který snadno najdeme obě vyhovující možnosti $16+19$ a $17+18$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za část a) a 3 body za část b). V neúplných řešeních oceňte částečné kroky následovně.

A1. Určení všech šesti číslic 1, 2, 3, 4, 5, 7, které mohou být dobré, společně s uvedením vyhovujících příkladů – 1 bod. Tento bod neudělujte, chybí-li byť jedna číslice nebo příklad pro ni, nebo je-li uvedena naopak některá číslice, která nemůže být dobrá.

A2. Určení všech čtyř číslic 0, 6, 8, 9, které nemohou být dobré, podložené patřičnými zdůvodněními – 2 body. Dílčí 1 bod je možné udělit, je-li pouze jedna ze čtyř číslic opomenuta.

B1. Důkaz tvrzení, že číslice 4 a 7 nemohou být současně dobré – 1 bod. (Jiná dvojice číslic z množiny $\{1,2,3,4,5,7\}$ tuto negativní vlastnost nemá.) Tento bod lze získat i za důkaz tvrzení, že číslice 1, 5, 7 nemohou být současně dobré, nebo i jiného tvrzení vedoucího ke stejnému potřebnému závěru, že dobrých číslic zároveň nemůže být více než pět.

B2. Nalezení některého (ze čtyř možných) příkladů čísel s pěti dobrými číslicemi – 2 body.

Celkově pak udělte A1 + A2 + B1 + B2 bodů. Pokud žák nepostupuje podle uvedeného schématu, dosáhne však relevantních zjištění, je možné udělit až 2 body (je-li například zdůvodněno, které z číslic 4, 5, 6, 7, 8 a 9 mohou být dobré a navíc jaká čísla na tabuli s každou z těchto dobrých číslic musí být). Za pouhou hypotézu, že největší možný počet dobrých čísel na tabuli je 5, ovšem žádný bod neudělujte.

4. *Tabulka* 10×10 *je vyplněna čísly* 1 *a* -1 *tak, že součet čísel v každém řádku až na jeden je roven 0 a součet čísel v každém sloupci až na jeden je roven stejnému číslu* s*. Určete největší možnou hodnotu* s *a ukažte, že větší být nemůže. Uveďte rovněž příklad tabulky s určenou největší hodnotou* s*.* (Josef Tkadlec)

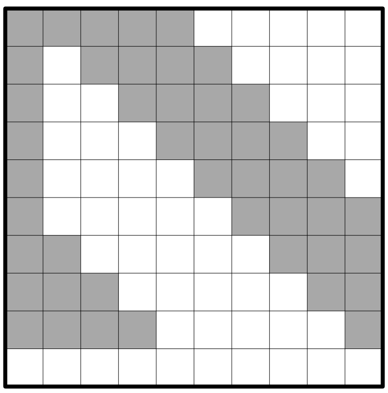
ŘEŠENÍ. V první části řešení ukážeme, že hodnota s nikdy nepřevyšuje číslo 2. Pro hodnotu $s = 2$ pak v druhé části uvedeme příklad vyhovující tabulky.

Mějme tedy libovolnou tabulku 10×10 vyplněnou podle zadání úlohy a kromě čísla s uvažme také součet S všech čísel v této tabulce. Jelikož součet čísel v každém řádku až na jeden je roven 0, tak hodnota S je rovna součtu 10 čísel v tomto jednom řádku, rovnému vždy nejvýše 10. Platí tedy $S \leqq 10$.

Na druhé straně, při počítání součtu S po sloupcích naší tabulky dostaneme podle zadání za devět sloupců dohromady hodnotu $9s$. K ní ještě musíme přičíst součet 10 čísel ve zbylém desátém sloupci, což je vždy nejméně -10. Tím pádem platí $S \geqq 9s - 10$.

Spojením nerovností $S \leqq 10$ a $S \geqq 9s - 10$ dostáváme $10 \geqq S \geqq 9s - 10$, odkud $10 \geqq 9s - 10$ neboli $9s \leqq 20$. Číslo s je však celé, a proto poslední nerovnost již vede k avizovanému odhadu $s \leqq 2$.

Slíbený příklad tabulky, která bude splňovat zadání úlohy pro $s = 2$, založíme na triku s „posouváním diagonály“, známém ze vzorových řešení úloh obou předchozích soutěžních kol. Tmavě jsou vybarvena políčka s čísly -1, políčka s čísly 1 jsou bílá. Pouze v desátém řádku je součet čísel různý od 0 (je roven 10), pouze v prvním sloupci je součet čísel různý od 2 (je roven -8).



Závěr. Největší možná hodnota s je rovna číslu 2.

POZNÁMKA. Je zřejmé, že každý řádkový i každý sloupcový součet vyplněné tabulky 10×10 je číslo sudé (rovné totiž číslu $2j - 10$, kde j je počet zastoupených jedniček). Proto je sudým číslem i hledaná maximální hodnota s. Na tom lze založit odvození odhadu $s \leqq 2$ cestou, kdy postupně procházíme největší sudé hodnoty $s = 10, 8, 6, 4$ a úvahami o počtu jedniček v celé tabulce vždy snadno docházíme ke sporu. Ukažme, jak lze celou diskuzi o možných počtech jedniček provést úsporněji.

Informace o řádkových součtech nám říká, že v některých devíti řádcích je po právě 5 jedničkách. Jelikož ve zbylém desátém řádku jich je nejvýše 10, v celé tabulce je tak nejvýše $9 \cdot 5 + 10 = 55$ jedniček. Kdyby však platilo $s \geqq 3$, pak by v každém z devíti sloupců se součtem s muselo být aspoň 7 jedniček – dohromady by jich bylo aspoň $7 \cdot 9 = 63$, a to je spor. Nutně tak platí $s \leqq 2$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za důkaz odhadu $s \leqq 2$ a 3 body za konstrukci tabulky pro hodnotu $s = 2$. V případě částečných řešení udělte:

- 1 bod za vyloučení *všech* lichých $s \in \{3, 5, 7, 9\}$, například obecnějším konstatováním, že každé možné s je nutně sudé (to lze považovat za zřejmé, tj. uvést bez vysvětlení).
- 2 body za vyloučení *všech* sudých $s \in \{4, 6, 8, 10\}$, z toho 1 bod za vyloučení *obou* hodnot $s \in \{8, 10\}$ a 1 bod za vyloučení *obou* hodnot $s \in \{4, 6\}$.
- 1 bod v případě pouhého uhodnutí odpovědi $s = 2$ (bez příkladu tabulky), pokud ovšem celkový zisk tímto nepřekročí 3 body.

Za triviální nerovnost $s \leqq 10$ žádný bod neudělujte. Proto také hodnoty $s > 10$ v položkách pro bodování vůbec nezmiňujeme.