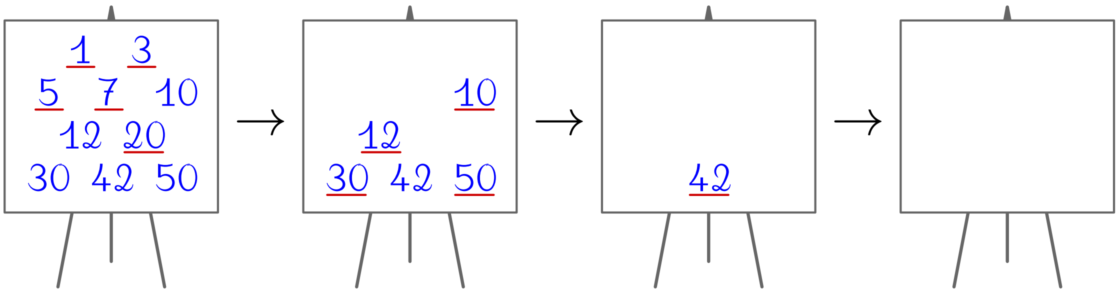
Návodné a doplňující úlohy pro kategorii B

V první části textu pod zadáním každé ze šesti soutěžních úloh najdete zadání návodných a doplňujících úloh. Tytéž úlohy i s řešeními (resp. odpověďmi a nástiny řešení či internetovými odkazy na ně) najdete ve druhé části textu.

1. *Na tabuli napíšeme deset navzájem různých přirozených čísel. V každém kroku nejdříve podtrhneme každé číslo, které není součtem žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli, poté všechna podtržená čísla smažeme. Například:*



a) Dokažte, že pro libovolných deset napsaných čísel zůstane po konečném počtu kroků tabule prázdná.

b) Určete největší počet kroků, po jejichž provedení ještě nemusí zůstat tabule prázdná. Uveďte příklad deseti čísel, pro něž tohoto počtu dosáhneme.

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

Budeme se zabývat pouze námětem ze soutěžní úlohy.

N1. Po kolika krocích bude tabule prázdná, pokud je na ní na začátku napsána pětice nejmenších přirozených čísel?

N2. Kolik nejméně přirozených čísel může být na tabuli napsáno, pokud chceme, aby tabule zůstala prázdná až po dvou krocích?

N3. Vyřešte variantu soutěžní úlohy, ve které budeme podtrhávat a následně mazat právě ta čísla, která nejsou *součinem* žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli.

D1. Na začátku můžeme na tabuli napsat libovolnou sedmici různých přirozených čísel obsahující čísla 1 a 2. Najděte všechny takové sedmice, pro které po třech krocích tabule ještě nebude prázdná.

D2. Jak by se změnily závěry soutěžní úlohy, pokud by na začátku bylo napsáno na tabuli jakýchkoli deset navzájem různých *celých* čísel?

D3. Mějme nějakou výchozí desetici různých přirozených čísel, pro kterou po čtyřech krocích tabule ještě nebude prázdná. Může se největší číslo z takové desetice rovnat číslu 35?

2. *Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$.* (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Tabulka 3×3 je vyplněna různými celými čísly tak, že součty tří čísel v každém řádku i sloupci jsou lichá čísla. Mohou být v tabulce a) čísla od 1 do 9, b) čísla od 2 do 10?

N2. Nechť $k > 1$ je celé číslo. Mějme dánu tabulku o k polích, kterou máme vyplnit k danými a navzájem různými čísly (tak, aby každé z nich bylo použito). Dokažte, že počet všech takových vyplnění je roven součinu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$. Tento součin nazýváme faktoriálem čísla k a značíme symbolem $k!$, který čteme „k faktoriál". Klademe také $1! = 1$ a $0! = 1$.

N3. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 2×2 a čísla od 1 do 4.

D1. Mějme celá čísla $0 \leqq k \leqq n$. Kolika způsoby lze z n kuliček různých barev vybrat některých k?

D2. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 4 krát 4 a celá čísla od 1 do 16.

D3. Do každého pole čtvercové tabulky $n \times n$ vepíšeme jedno z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla buď všechna čísla stejná, nebo všechna různá. Příkladem pro $n = 5$ je následující tabulka

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Označme S součet všech čísel tabulky. Kolik různých hodnot S pro dané n existuje?

D4. Je dáno celé číslo $n \geqq 2$. Kolika způsoby lze vybarvit políčka tabulky $n \times n$ čtyřmi barvami tak, aby v každém čtverečku 2×2 byla každá barva použita právě jednou?

3. *Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají kvadratické trojčleny $P(x) = x^2 + ax + b$ a $Q(x) = x^2 + bx + a$ následující vlastnost: každá z rovnic*

$$aP(x) + bQ(x) = 0 \qquad a \qquad aQ(x) + bP(x) = 0$$

je kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, pro které reálné hodnoty parametru p je

$$(p + 2)x^2 + 2(p + 1)x + (p - 1) = 0$$

kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem.

N2. Nechť reálná čísla r, s, t splňují soustavu dvou rovnic $r^2 = 8st$ a $s^2 = rt$. Dokažte, že $r = 2s$. Rozmyslete si, jak tento výsledek využít k řešení soutěžní úlohy, když za r, s, t zvolíte vhodné výrazy.

D1. Najděte všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen.

D2. V oboru reálných čísel r, s, t řešte soustavu dvou rovnic z úlohy N2.

D3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c lze šesti způsoby doplnit jako koeficienty kvadratické rovnice

$$\square x^2 + \square x + \square = 0.$$

a) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že všechny sestavené rovnice mají alespoň jeden reálný kořen.

b) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že právě pět ze šesti sestavených rovnic má alespoň jeden reálný kořen.

D4. a) Dokažte nerovnost $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

b) Najděte nejmenší reálné číslo k takové, aby nerovnost $k(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2+ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

D5. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \quad \frac{1}{y+z} + x = 1 \quad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

4. *V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $BC \parallel DE$, $CD \parallel AE$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$. Dokažte, že $|CD| = |DE|$.* (Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozmyslete si a zdůvodněte, že pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy lze získat z jistého rovnoběžníku „odstřihnutím“ jednoho jeho „rohu“.

N2. Připomeňme, že osou libovolného (konvexního i nekonvexního) úhlu s vrcholem V nazýváme tu polopřímku s počátečním bodem P, která daný úhel rozděluje na dva shodné úhly (tj. úhly téže velikosti). Připomeňte si rovněž a dokažte „větu o ose úhlu“: *Osa úhlu AVB, který má velikost menší než $180°$, je tvořena právě těmi jeho body, které mají od obou přímek VA, VB stejnou vzdálenost.*

N3. Kružnicí připsanou (ke) straně KL obecného trojúhelníku KLM rozumíme tu kružnici, která se dotýká strany KL v jejím vnitřním bodě a přímek KM, LM v bodech ležících uvnitř poloroviny opačné k polorovině KLM. Dokažte, že střed takové kružnice je průsečíkem os vnějších úhlů při vrcholech K, L trojúhelníku KLM a že jím prochází rovněž osa jeho vnitřního úhlu při vrcholu M.

D1. Dokažte, že pro pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy platí $|\sphericalangle CDE| > 60°$.

D2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$.

D3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Přímky BI, CI protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST protne strany AB, AC v bodech K, L. Dokažte, že čtyřúhelník $AKIL$ je kosočtverec (případně čtverec).

D4. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou D a E vnitřní body strany BC, přitom D leží mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Předpokládejme, že osa úhlu DAE má s osou úsečky BC jediný společný bod, který označíme F. Dokažte rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180°$.

5. *Zkoumejme trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících podmínku $ab = c^2$.*

a) Pro každé prvočíslo p uveďte příklad trojice (a, b, c), pro kterou platí rovnost $a + b - 2c = p$.

b) Dokažte, že pro každou trojici (a, b, c) je $a + b + 2c$ složené číslo.

(Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Existuje nějaká trojice (a, b, c) přirozených čísel splňující podmínky $ab = c^2$ a $a + b - 2c = 1$? Pokud ano, jak by se dala využít k řešení části a) soutěžní úlohy pro libovolné prvočíslo p?

N2. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla u, v, w platí $u^2 = v^2w$, je číslo w druhou mocninou přirozeného čísla.

N3. Dokažte, že pokud součin dvou nesoudělných přirozených čísel u, v je roven druhé mocnině celého čísla, jsou obě čísla u, v také druhými mocninami celých čísel.

D1. Pro dané prvočíslo p najděte *všechny* trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících obě rovnosti $ab = c^2$ a $a + b - 2c = p$.

D2. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji.

D3. Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$.

D4. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$.

D5. Přirozená čísla a, b splňují rovnost $b^2 = a^2 + ab + b$. Ukažte, že b je druhou mocninou přirozeného čísla.

6. *Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Označme I střed kružnice jemu vepsané, M střed přepony AC a X průsečík přímky IM s přímkou BC. Dokažte, že pokud leží body B, I, M, C na jedné kružnici, je trojúhelník ABX rovnoramenný.*
(David Hruška)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na kružnici se středem O jsou dány body B a C takové, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvolme bod A na delším oblouku BC a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$. a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$. b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby byl úhel BAC co největší. c) Na kratším oblouku BC zvolíme bod A'. Zjistěte, jak máme volit polohy bodů A, A' (oba leží na dané kružnici), aby součet $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BA'C|$ byl co největší.

N2. Mějme dán konvexní čtyřúhelník $PQRS$. Dokažte, že jeho vrcholy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$.

N3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A. Vyjádřete velikost úhlu BIC pomocí α.

N4. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme M střed přepony AC a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A. Vyjádřete pomocí α velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelnících ABM a BCM.

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$.

D2. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímku AB a kolmý průmět Q bodu B na přímku AC. Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD.

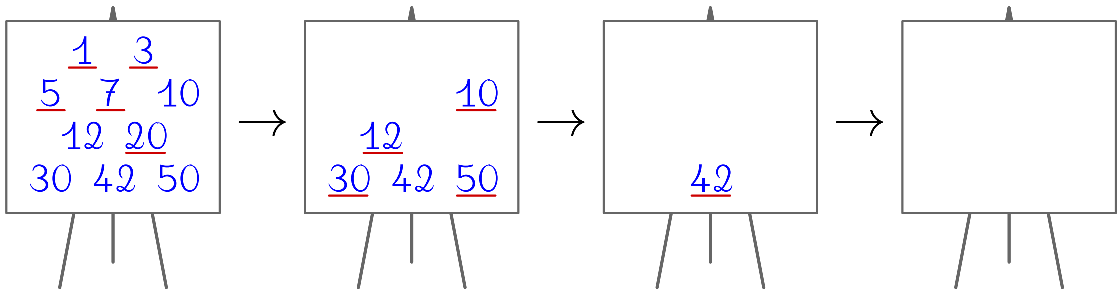
D3. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici. (Kružnicí připsanou například straně AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ rozumíme kružnici, která se dotýká strany AB a polopřímek opačných k polopřímkám AD a BC.)

D4. Je dána kružnice k a její průměr AB. Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě E (různém od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné

D5. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN.

Na následujících stranách najdete stejné návodné a doplňující úlohy ještě jednou, zato doplněné o výsledky s nástiny řešení či o internetové odkazy na ně.

1. *Na tabuli napíšeme deset navzájem různých přirozených čísel. V každém kroku nejdříve podtrhneme každé číslo, které není součtem žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli, poté všechna podtržená čísla smažeme. Například:*



a) Dokažte, že pro libovolných deset napsaných čísel zůstane po konečném počtu kroků tabule prázdná.

b) Určete největší počet kroků, po jejichž provedení ještě nemusí zůstat tabule prázdná. Uveďte příklad deseti čísel, pro něž tohoto počtu dosáhneme.

(Patrik Bak)

Návodné a doplňující úlohy:

Budeme se zabývat pouze námětem ze soutěžní úlohy.

N1. Po kolika krocích bude tabule prázdná, pokud je na ní na začátku napsána pětice nejmenších přirozených čísel? [Po dvou krocích. V prvním kroku smažeme čísla 1 a 2, v druhém kroku zbylá čísla 3, 4, 5.]

N2. Kolik nejméně přirozených čísel může být na tabuli napsáno, pokud chceme, aby tabule zůstala prázdná až po dvou krocích? [Budou-li na tabuli nejvýše dvě čísla, bude tabule zřejmě prázdná hned po prvním kroku. Tři napsaná čísla někdy ke dvěma krokům vedou – obecně je to trojice (a, b, c), kde $c = a + b$. Podrobněji: Chceme-li, aby tabule po prvním kroku ještě nebyla prázdná, musí být některé z napsaných čísel c součtem některých dalších čísel a a b splňujících $a \neq b$. Protože v rovnosti $c = a + b$ jsou všechna čísla kladná, máme kromě $a \neq b$ také $c > a$ a $c > b$. Na tabuli tedy musí být napsána alespoň tři čísla, jako např. $(1, 2, 3)$.]

N3. Vyřešte variantu soutěžní úlohy, ve které budeme podtrhávat a následně mazat právě ta čísla, která nejsou *součinem* žádných dvou různých čísel napsaných na tabuli. [Je-li na tabuli číslo 1, bude v prvním kroku smazáno jako jediné. Jinak v každém kroku budou mezi smazanými dvě nejmenší čísla – výjimkou může být jen poslední krok, bude-li při něm na tabuli jediné číslo. Z uvedených poznatků už plyne, že tabule bude prázdná po nejvýše 6 krocích. Po 5 krocích ještě prázdná být nemusí, jak ukazuje příklad výchozích čísel 1, 2, 3, 6, 18, …, kde každé číslo počínaje čtvrtým je rovno součinu dvou čísel předchozích. Hledaný největší počet kroků je tedy roven 5.]

D1. Na začátku můžeme na tabuli napsat libovolnou sedmici různých přirozených čísel obsahující čísla 1 a 2. Najděte všechny takové sedmice, pro které po třech krocích tabule ještě nebude prázdná. [Takové sedmice jsou čtyři: $(1, 2, 3, 4, 7, 10, 17)$, $(1, 2, 3, 4, 7, 11, 18)$, $(1, 2, 3, 5, 8, 11, 19)$ a $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)$. V každém kroku musíme smazat pouze dvě nejmenší čísla. Uspořádejme čísla vzestupně. Třetí číslo tak musí být $1+2=3$, čtvrté $1+3=4$ nebo $2+3=5$. Podobně po číslech $3, 4$ musí následovat čísla $7, 10$ nebo $7, 11$ a po číslech $3, 5$ čísla $8, 11$ nebo $8, 13$. Poslední sedmé číslo musí být součtem pátého a šestého čísla.]

D2. Jak by se změnily závěry soutěžní úlohy, pokud by na začátku bylo napsáno na tabuli jakýchkoli deset navzájem různých *celých* čísel? [Už tvrzení z části a) by přestalo platit – uvažte například desetici $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, ve které žádné číslo nepodtrhneme, a tedy ani nesmažeme.]

D3. Mějme nějakou výchozí desetici různých přirozených čísel, pro kterou po čtyřech krocích tabule ještě nebude prázdná. Může se největší číslo z takové desetice rovnat číslu 35? [Může:

$$(\underline{1}, \underline{2}, 3, 4, 7, 10, 11, 17, 18, 35) \to (\underline{3}, \underline{4}, 7, 10, 11, 17, 18, 35) \to$$
$$\to (\underline{7}, \underline{10}, \underline{11}, 17, 18, 35) \to (\underline{17}, \underline{18}, 35) \to (\underline{35}).\ ]$$

2. *Označme M počet všech možných vyplnění tabulky 3×3 navzájem různými přirozenými čísly od 1 do 9. Dále označme L počet těch vyplnění, kde jsou navíc součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla. Určete poměr $L : M$.* (Jaromír Šimša)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Tabulka 3×3 je vyplněna různými celými čísly tak, že součty tří čísel v každém řádku i sloupci jsou lichá čísla. Mohou být v tabulce a) čísla od 1 do 9, b) čísla od 2 do 10? [a) ano, b) ne. V případě a) například můžeme lichými čísly, kterých je 5, zaplnit první řádek a první sloupec. Protože $2+3+\ldots+10=54$ je sudé číslo, musí být v případě b) sudý součet čísel v aspoň jednom řádku (i v aspoň jednom sloupci).]

N2. Nechť $k > 1$ je celé číslo. Mějme dánu tabulku o k polích, kterou máme vyplnit k danými a navzájem různými čísly (tak, aby každé z nich bylo použito). Dokažte, že počet všech takových vyplnění je roven součinu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k$. Tento součin nazýváme faktoriálem čísla k a značíme symbolem $k!$, který čteme „k faktoriál“. Klademe také $1! = 1$ a $0! = 1$. [Označme pole čísly od 1 do k a vybírejme pro ně čísla postupně takto: nejdříve pro pole 1, pak pro pole 2 atd., až nakonec pro pole k. Počty možností těchto výběrů budou postupně k, $k-1$ atd., až 1. Celkový počet vyplnění dostaneme, když uvedené počty možností mezi sebou vynásobíme.]

N3. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 2×2 a čísla od 1 do 4. [$1 : 3$. Mezi čísly od 1 do 4 jsou dvě lichá a dvě sudá, takže všechny řádkové a sloupcové součty budou liché, když lichá čísla 1 a 3 nebudou ležet ani ve stejném řádku ani sloupci, tj. budou na jedné z obou diagonál. Vybrat diagonálu pro čísla 1, 3 můžeme dvěma způsoby, umístit na ni čísla 1, 3 dvěma způsoby a na druhou diagonálu čísla 2, 4 též dvěma způsoby. Celkem tak existuje právě $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ vyplnění, která vyhovují zadání. Jelikož podle N2 je počet všech vyplnění roven $4! = 24$, hledaný poměr je roven $8 : 24$ neboli $1 : 3$.]

D1. Mějme celá čísla $0 \leqq k \leqq n$. Kolika způsoby lze z n kuliček různých barev vybrat některých k? [Vybírejme těchto k kuliček jednu po druhé. V prvním kroku máme n možností, v druhém $n-1$ možností atd., až v k-tém kroku máme $n-k+1$ možností. Uvědomme si, že pokud vybereme tytéž kuličky v jiném pořadí, dostaneme stejný výsledný výběr. Možných pořadí k kuliček je podle N2 právě $k!$. Hledaný počet k-tic je proto roven $\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$. Výsledek se nazývá *kombinační číslo* a značí se symbolem $\binom{n}{k}$, který čteme „n nad k".]

D2. Řešte soutěžní úlohu pro tabulku 4 krát 4 a celá čísla od 1 do 16. [$L : M = 8 : 715$. Pro počet M všech vyplnění platí $M = 16!$. Ukažme dále, že pro počet L těch vyplnění, kde jsou součty všech čísel v každém řádku i sloupci lichá čísla, platí $L = 144 \cdot 8! \cdot 8!$. Odtud už po rutinním zkrácení zlomku $(144 \cdot 8! \cdot 8!)/16!$ vyplyne uvedený výsledek.

Mezi čísly od 1 do 16 je právě osm lichých čísel. V každém řádku musí být buď jedno, nebo tři lichá čísla. Celkem jich je 8, proto snadno zjistíme, že ve dvou řádcích r_1, r_2 musí být tři lichá čísla a ve zbylých dvou řádcích r_3, r_4 jedno liché číslo. Stejný závěr platí také pro sloupce – ve dvou sloupcích s_1, s_2 musí být tři lichá čísla a ve zbylých dvou sloupcích s_3, s_4 jedno liché číslo.

Ukažme, že ve čtveřici políček daných průnikem řádků r_1, r_2 se sloupci s_1, s_2 jsou jen lichá čísla. Označme jejich počet x. Protože v řádcích r_1 a r_2 je dohromady 6 lichých čísel, což platí i pro sloupce s_1 a s_2, máme $2 \cdot 6 - x \leqq 8$, odkud $x \geqq 4$, tj. skutečně $x = 4$. Zmíněná čtveřice políček tak obsahuje čtyři lichá čísla. Zbylá dvě lichá čísla z řádků r_1 a r_2 se pak nacházejí po jednom ve sloupcích s_3 a s_4, pro výběr jejich pozic tak máme 2 možnosti. Totéž platí pro zbylá dvě lichá čísla ze sloupců s_1 a s_2: pro výběr jejich pozic v řádcích r_3 a r_4 máme rovněž 2 možnosti. Tím máme popsány možné vyhovující pozice všech osmi lichých čísel.

Celkový počet vyhovujících výběrů pozic lichých a sudých čísel proto spočteme takto: nejdříve zvolíme libovolně dvojici řádků s_1, s_2 (6 možností) a dvojici sloupců r_1, r_2 (6 možností), potom provedeme výběry pro pozice lichých čísel ve dvojicích sloupců s_3, s_4 a r_3, r_4 (pro každý z obou výběrů máme jak víme 2 možnosti). Počet vyhovujících výběrů pozic pro lichá a sudá čísla je tedy $6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 144$. Odtud už plyne výše uvedená hodnota $L = 144 \cdot 8! \cdot 8!$, neboť 8 pozic pro lichá čísla stejně jako 8 pozic pro sudá čísla můžeme vyplnit 8! způsoby.]

D3. Do každého pole čtvercové tabulky $n \times n$ vepíšeme jedno z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, aby v každém řádku i v každém sloupci byla buď všechna čísla stejná, nebo všechna různá. Příkladem pro $n = 5$ je následující tabulka

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Označme S součet všech čísel tabulky. Kolik různých hodnot S pro dané n existuje? [50–B–I–3]

D4. Je dáno celé číslo $n \geqq 2$. Kolika způsoby lze vybarvit políčka tabulky $n \times n$ čtyřmi barvami tak, aby v každém čtverečku 2×2 byla každá barva použita právě jednou? [$2^3 \cdot 3^{2n-3}$ způsoby. Vybarvěme nejprve první řádek a první sloupec tak, aby v žádném čtverci 2×2 nebyla žádná barva použita vícekrát. Začněme políčkem v levém horním rohu – pro jeho vybarvení máme 4 možnosti. Pak postupně vybarvujme první sloupec shora dolů – v každém kroku máme na výběr ze tří barev. Nakonec vybarvíme první řádek zleva doprava – v prvním kroku máme pouze 2 možnosti obarvení, ve zbylých krocích máme 3 možnosti. Celkový počet vyhovujících obarvení prvního řádku a prvního sloupce je proto roven $4 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 \cdot 3^{n-2}$, tj. $2^3 \cdot 3^{2n-3}$. To je výsledek úlohy, neboť každé takové obarvení lze rozšířit na vyhovující obarvení celé tabulky právě jedním způsobem. Skutečně, jakmile známe barvy tří políček některého čtverečku 2×2, barva čtvrtého políčka je jednoznačně určena; takové dobarvování můžeme provést například tak, že zleva doprava dobarvíme $n-1$ čtverečků nejprve ve druhém řádku, pak ve třetím řádku atd. až nakonec v n-tém řádku. Využijeme přitom všech $(n-1)^2$ čtverečků 2×2 v dané šachovnici, takže získané obarvení je vyhovující.]

3. *Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají kvadratické trojčleny $P(x) = x^2 + ax + b$ a $Q(x) = x^2 + bx + a$ následující vlastnost: každá z rovnic*

$$aP(x) + bQ(x) = 0 \qquad a \qquad aQ(x) + bP(x) = 0$$

je kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem. (Jaroslav Švrček)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Rozhodněte, pro které reálné hodnoty parametru p je

$$(p+2)x^2 + 2(p+1)x + (p-1) = 0$$

kvadratickou rovnicí s dvojnásobným kořenem. [Jediná hodnota $p = -3$. Pokud $p = -2$, nejedná se o kvadratickou rovnici. Je-li $p \neq -2$, má tato kvadratická rovnice dvojnásobný kořen, právě když je její diskriminant nulový. Ten je přitom roven $(2(p+1))^2 - 4(p+2)(p-1)$, po úpravě $4(p+3)$, což je rovno nule pouze pro $p = -3$.]

N2. Nechť reálná čísla r, s, t splňují soustavu dvou rovnic $r^2 = 8st$ a $s^2 = rt$. Dokažte, že $r = 2s$. Rozmyslete si, jak tento výsledek využít k řešení soutěžní úlohy, když za r, s, t zvolíte vhodné výrazy. [Vynásobíme-li první rovnici r, dostáváme $r^3 = 8rst$. Na pravé straně pak můžeme nahradit rt za s^2 díky druhé rovnici. Obdržíme $r^3 = 8s^3$ neboli $r^3 = (2s)^3$, což skutečně dává $r = 2s$, neboť funkce $y = x^3$ je jak známo rostoucí, a tedy prostá. Užití k řešení soutěžní úlohy zde prozrazovat nebudeme.]

D1. Najděte všechny kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ takové, že pokud libovolný z koeficientů a, b, c zvětšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, který bude mít dvojnásobný kořen. [53–B–II–2]

D2. V oboru reálných čísel r, s, t řešte soustavu dvou rovnic z úlohy N2. [Řešeními jsou právě trojice $(r, s, t) = (4t, 2t, t)$ a $(r, s, t) = (0, 0, t)$, kde t je v obou případech libovolné reálné číslo. Podle N2 platí nutně $r = 2s$; po dosazení takového r získají rovnice tvar $4s^2 = 8st$ a $s^2 = 2st$. Vidíme, že v případě $s = 0$ je $r = 2s = 0$ a t je libovolné; v případě $s \neq 0$ se obě rovnice $4s^2 = 8st$ a $s^2 = 2st$ zjednoduší na $s = 2t$, takže $r = 2s = 4t$, a tudíž $(r, s, t) = (4t, 2t, t)$, kde t je libovolné.]

D3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a, b, c lze šesti způsoby doplnit jako koeficienty kvadratické rovnice

$$\Box x^2 + \Box x + \Box = 0.$$

a) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že všechny sestavené rovnice mají alespoň jeden reálný kořen.

b) Rozhodněte, zda existuje trojice (a, b, c) taková, že právě pět ze šesti sestavených rovnic má alespoň jeden reálný kořen. [69–B–II–1]

D4. a) Dokažte nerovnost $4(a^2 + b^2) > (a + b)^2 + ab$ pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b.

b) Najděte nejmenší reálné číslo k takové, aby nerovnost $k(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2+ab$ platila pro všechny dvojice kladných reálných čísel a, b. [70–B–II–1]

D5. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$\frac{1}{x+y} + z = 1, \qquad \frac{1}{y+z} + x = 1 \qquad \frac{1}{z+x} + y = 1.$$

[69–A–II–1]

4. *V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $BC \parallel DE$, $CD \parallel AE$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$. Dokažte, že $|CD| = |DE|$.* (Patrik Bak)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Rozmyslete si a zdůvodněte, že pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy lze získat z jistého rovnoběžníku „odstřihnutím“ jednoho jeho „rohu“. [Zadaný konvexní pětiúhelník leží jak v pásu mezi rovnoběžkami BC a DE, tak v pásu mezi rovnoběžkami CD a AE. Proto leží i v průniku těchto dvou pásů, kterým je rovnoběžník $PCDE$, kde P je průsečík (různoběžných) přímek BC a AE. Protože zbylé vrcholy A, B jsou vnitřní body stran PE, resp. PC, od rovnoběžníku $PCDE$ oddělíme trojúhelník APB.]

N2. Připomeňme, že osou libovolného (konvexního i nekonvexního) úhlu s vrcholem V nazýváme tu polopřímku s počátečním bodem P, která daný úhel rozděluje na dva shodné úhly (tj. úhly téže velikosti). Připomeňte si rovněž a dokažte „větu o ose úhlu“: *Osa úhlu AVB, který má velikost menší než $180°$, je tvořena právě těmi jeho body, které mají od obou přímek VA, VB stejnou vzdálenost.* [Označme $\alpha = |\sphericalangle AVB|$. Stačí uvažovat jen vnitřní body úhlu AVB, nechť X je libovolný z nich. Při označení $\alpha_1 = |\sphericalangle AVX|$ a $\alpha_2 = |\sphericalangle XVB|$ platí $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha < 180°$ a bod X má od přímek VA, VB vzdálenosti $|VX| \sin \alpha_1$, resp. $|VX| \sin \alpha_2$. Ty se proto rovnají, právě když platí $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$, což pro konvexní úhly nastane jen ve dvou případech: $\alpha_1 = \alpha_2$ nebo $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$. Druhý z nich je však výše vyloučen; první případ znamená právě to, že X je vnitřním bodem osy úhlu AVB.]

N3. Kružnicí připsanou (ke) straně KL obecného trojúhelníku KLM rozumíme tu kružnici, která se dotýká strany KL v jejím vnitřním bodě a přímek KM, LM v bodech ležících uvnitř poloroviny opačné k polorovině KLM. Dokažte, že střed takové kružnice je průsečíkem os vnějších úhlů při vrcholech K, L trojúhelníku KLM a že jím prochází rovněž osa jeho vnitřního úhlu při vrcholu M. [Průsečík S zmíněných dvou os vnějších úhlů je vnitřním bodem úhlu KML ležícím v polorovině opačné k polorovině KLM a má podle N2 stejnou vzdálenost v od všech tří přímek KM, KL a LM, tedy (opět díky N2) leží i na ose úhlu KML. Kružnice se středem S a poloměrem v je pak zřejmě připsána straně KL trojúhelníku KLM.]

D1. Dokažte, že pro pětiúhelník $ABCDE$ ze soutěžní úlohy platí $|\sphericalangle CDE| > 60°$. [Nechť P je průsečík přímek BC a AE. Pak $PCDE$ je rovnoběžník s body A, B uvnitř stran PE, resp. PC. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAE|$, $\beta = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ a $\delta = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EPC|$. Ze součtu vnitřních úhlů $\triangle APB$, který má vyjádření $(180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta) + \delta = 180°$, plyne rovnost $\alpha+\beta = 90° + \frac{1}{2}\delta$. Porovnáme-li v $\triangle ADE$ vnitřní úhel u vrcholu A s vnějším úhlem při vrcholu E, dostaneme $\alpha < \delta$. Stejně tak z $\triangle BCD$ obdržíme $\beta < \delta$. Sečtením dvou odvozených nerovností vychází $\alpha+\beta < 2\delta$, takže z rovnosti $\alpha+\beta = 90° + \frac{1}{2}\delta$ plyne $90° + \frac{1}{2}\delta < 2\delta$, odkud $\delta > 60°$, jak jsme měli dokázat.]

D2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s nejdelší stranou BC. Uvnitř stran AB a AC leží po řadě body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F takový bod, že $ABFC$ je rovnoběžník. Dokažte, že $|FD| = |FE|$. [71–B–I–2]

D3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané. Přímky BI, CI protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $S \neq B$, $T \neq C$. Úsečka ST protne strany AB, AC v bodech K, L. Dokažte, že čtyřúhelník $AKIL$ je kosočtverec (případně čtverec). [71–A–S–2]

D4. V ostroúhlém trojúhelníku ABC jsou D a E vnitřní body strany BC, přitom D leží mezi B a E, $|AD| = |CD|$ a $|AE| = |BE|$. Předpokládejme, že osa úhlu DAE má s osou úsečky BC jediný společný bod, který označíme F. Dokažte rovnost $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle DFE| = 180°$. [70–A–II–3]

5. *Zkoumejme trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících podmínku $ab = c^2$.*

a) Pro každé prvočíslo p uveďte příklad trojice (a, b, c), pro kterou platí rovnost $a + b - 2c = p$.

b) Dokažte, že pro každou trojici (a, b, c) je $a + b + 2c$ složené číslo.

(Josef Tkadlec)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Existuje nějaká trojice (a, b, c) přirozených čísel splňující podmínky $ab = c^2$ a $a + b - 2c = 1$? Pokud ano, jak by se dala využít k řešení části a) soutěžní úlohy pro libovolné prvočíslo p? [Ano, ale prozrazovat ji nebudeme, natož způsob, jak by se dala využít. Zkuste vypsat všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel splňujících rovnici $ab = c^2$ pro malé hodnoty c. Vyhovuje některá z nich i druhé podmínce?]

N2. Dokažte, že pokud pro přirozená čísla u, v, w platí $u^2 = v^2 w$, je číslo w druhou mocninou přirozeného čísla. [Uvažme libovolné prvočíslo p dělící číslo w. Z rovnosti $u^2 = v^2 w$ plyne, že p je také dělitel čísla u, takže číslo u^2 má ve svém rozkladu na prvočinitele sudý počet výskytů p, který ovšem musí být větší než případný sudý počet výskytů p v rozkladu čísla v^2. Odtud už plyne, že p má také sudý počet výskytů v rozkladu čísla w, které tudíž je druhou mocninou přirozeného čísla (platí to i v případě $w = 1$).]

N3. Dokažte, že pokud součin dvou nesoudělných přirozených čísel u, v je roven druhé mocnině celého čísla, jsou obě čísla u, v také druhými mocninami celých čísel. [Uvažme rozklady čísel u, v a uv na prvočinitele. V rozkladu druhé mocniny rovné číslu uv má každé prvočíslo sudý počet výskytů. Čísla u, v však nemají žádného společného prvočinitele, proto také v jejich rozkladech má každé prvočíslo sudý počet výskytů (v jednom z rozkladů u, v je to nula, ve druhém stejný počet jako v rozkladu uv).]

D1. Pro dané prvočíslo p najděte *všechny* trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujících obě rovnosti $ab = c^2$ a $a+b-2c = p$. [$\{a, b\} = \{(n+1)p, np\}$ a $c = n(n+1)p$, kde n je libovolné přirozené číslo. Označme d největší společný dělitel čísel a, b. Protože součin ab má být druhou mocninou celého čísla, podle N2 a N3 platí $a = u^2 d$, $b = v^2 d$ pro vhodná přirozená u, v, takže $c = uvd$. Dosazením do $a + b - 2c = p$ po snadné úpravě dostáváme $d(u - v)^2 = p$. Protože p je prvočíslo, musí být nutně $(u - v) = \pm 1$ a $d = p$. V případě $u - v = 1$ máme $a = (v + 1)^2 p$, $b = v^2 p$ a $c = v(v + 1)p$; v případě $u - v = -1$ podobně $a = u^2 p$, $b = (u + 1)^2 p$ a $c = u(u + 1)p$.]

D2. Pravoúhlý trojúhelník má celočíselné délky stran a obvod 11 990. Navíc víme, že jedna jeho odvěsna má prvočíselnou délku. Určete ji. [71–B–I–1]

D3. Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí $p + q^2 = q + 145p^2$. [55–C–II–4]

D4. Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí $p + q^2 = q + p^3$. [55–B–II–1]

D5. Přirozená čísla a, b splňují rovnost $b^2 = a^2 + ab + b$. Ukažte, že b je druhou mocninou přirozeného čísla. [69–A–III–4]

6. *Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Označme I střed kružnice jemu vepsané, M střed přepony AC a X průsečík přímky IM s přímkou BC. Dokažte, že pokud leží body B, I, M, C na jedné kružnici, je trojúhelník ABX rovnoramenný.* (David Hruška)

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Na kružnici se středem O jsou dány body B a C takové, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvolme bod A na delším oblouku BC a označme $|\sphericalangle AOB| = \delta$. a) Zjistěte velikost úhlu BAC, když $\delta = 140°$. b) Zjistěte, jak máme volit úhel δ, aby byl úhel BAC co největší. c) Na kratším oblouku BC zvolíme bod A'. Zjistěte, jak máme volit polohy bodů A, A' (oba leží na dané kružnici), aby součet $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BA'C|$

byl co největší. [V rovnoramenných trojúhelnících BOC, COA a AOB spočtěte úhly, nebo je vyjádřete v závislosti na úhlu δ. V části a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60°$, stejně jako v části b), a to nezávisle na volbě δ.* V části c) vyjde součet 180° nezávisle na poloze bodu A nebo A'.**]

N2. Mějme dán konvexní čtyřúhelník $PQRS$. Dokažte, že jeho vrcholy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$. [Úvodem konstatujme, že díky konvexnosti $PQRS$ leží vrcholy R, S posuzovaných úhlů PRQ, PSQ uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou PQ. Předpokládejme nejprve, že čtyřúhelník $PQRS$ má všechny čtyři vrcholy na jedné kružnici. Rovnost $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ|$ je pak rovností dvou obvodových úhlů této kružnice, které přísluší témuž oblouku PQ.

Předpokládejme naopak, že úhly PRQ a PSQ jsou shodné a označme φ jejich velikost. Dokážeme, že kružnice opsané trojúhelníkům PRQ a PSQ mají stejný střed, tím pádem i stejný poloměr. V případě $\varphi = 90°$ je to důsledek Thaletovy věty. Posuďme nyní případ $\varphi < 90°$. Středy kružnic opsaných trojúhelníkům PRQ a PSQ pak leží uvnitř poloroviny $PQR = PQS$ a každý z nich tvoří s body P a Q rovnoramenný trojúhelník ze základnou PQ, který má podle věty o obvodovém a středovém úhlu u hlavního vrcholu úhel 2φ. Proto tyto dva středy splývají. V případě $\varphi > 90°$ pak středy obou opsaných kružnic leží v polorovině opačné k polorovině $PQR = PQS$ a odpovídající rovnoramenné trojúhelníky tehdy mají u hlavního vrcholu úhel $360° - 2\varphi$.***]

N3. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A. Vyjádřete velikost úhlu BIC pomocí α. [$90° + \frac{1}{2}\alpha$. Označme po řadě β, γ velikosti vnitřních úhlů u vrcholů B a C. Protože bod I leží na osách obou těchto úhlů, ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku BIC dostáváme $|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 90° + \frac{1}{2}\alpha$.]

N4. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme M střed přepony AC a α velikost vnitřního úhlu u vrcholu A. Vyjádřete pomocí α velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelnících ABM a BCM. [Trojice $(\alpha, \alpha, 180° - 2\alpha)$ a $(90° - \alpha, 90° - \alpha, 2\alpha)$. Využijte toho, že díky Thaletově větě jsou oba trojúhelníky ABM a BCM rovnoramenné s hlavním vrcholem M.]

D1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť D je libovolný vnitřní bod odvěsny AC a p kolmice z bodu D k přeponě AB. Označme $E \neq D$ bod přímky p takový, že body A, B, D, E leží na kružnici. Označme ještě F průsečík přímek p a BC. Dokažte, že $|AE| = |AF|$. [70–B–II–3]

D2. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímku AB a kolmý průmět Q bodu B na přímku AC. Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD. [68–B–I–5]

D3. Dokažte, že středy kružnic vně připsaných jednotlivým stranám libovolného konvexního čtyřúhelníku leží na téže kružnici. (Kružnicí připsanou například

* Oba fakty jsou důsledkem známé *věty o obvodových a středových úhlech* v libovolné kružnici.

** Výsledek části c) má známé zobecnění: Konvexní čtyřúhelník je tětivový (tj. jeho vrcholy leží na jedné kružnici), právě když součet velikostí jeho protějších vnitřních úhlů je 180°.

*** Dokázané tvrzení je okamžitým důsledkem tzv. *věty o ekvigonále úsečky*: Množina všech bodů, ze kterých je daná úsečka PQ vidět pod daným úhlem α, kde $0° < \alpha < 180°$, je tvořena vnitřními body dvou kružnicových oblouků s krajními body P a Q, které jsou souměrně sdružené podle přímky PQ.

straně AB konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ rozumíme kružnici, která se dotýká strany AB a polopřímek opačných k polopřímkám AD a BC.) [69–B–S–2]

D4. Je dána kružnice k a její průměr AB. Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě E (různém od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné [68–B–S–3]

D5. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A. Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI. Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN. [70–A–III–2]