Úlohy domácí části I. kola kategorie A

1. *V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic*

$$2x + \lfloor y \rfloor = 2022,$$
$$3y + \lfloor 2x \rfloor = 2023.$$

(Symbol $\lfloor a \rfloor$ značí dolní celou část *reálného čísla a, tj. největší celé číslo, které není větší než a. Např. $\lfloor 1{,}9 \rfloor = 1$ a $\lfloor -1{,}1 \rfloor = -2$.)* (Jaroslav Švrček)

Řešení. Jelikož $\lfloor y \rfloor$ a 2022 jsou celá čísla, z rovnice $2x + \lfloor y \rfloor = 2022$ plyne, že číslo $2x$ je rovněž celé, tudíž platí $\lfloor 2x \rfloor = 2x$. Tím pádem ze zadané soustavy eliminujeme neznámou x, když odečteme první rovnici od druhé. Dostaneme

$$3y - \lfloor y \rfloor = 1. \tag{1}$$

Díky (1) je $3y$ celé číslo, takže má (podle svého zbytku při dělení třemi) jedno z vyjádření $3k$, $3k + 1$ nebo $3k + 2$, kde k je celé číslo. Odtud (po vydělení třemi) vychází, že pro číslo y platí buď $y = k$, nebo $y = k + \frac{1}{3}$, nebo $y = k + \frac{2}{3}$, kde přitom $k = \lfloor y \rfloor$. Tyto tři možnosti teď rozebereme.

- V případě $y = k$ je (1) rovnice $3k - k = 1$ s neceločíselným řešením $k = \frac{1}{2}$.
- V případě $y = k + \frac{1}{3}$ je (1) rovnice $(3k+1) - k = 1$ s řešením $k = 0$, kterému odpovídá $y = \frac{1}{3}$. Původní soustava rovnic je pak zřejmě splněna, právě když $2x = 2022$ neboli $x = 1011$.
- V případě $y = k + \frac{2}{3}$ je (1) rovnice $(3k+2) - k = 1$ s neceločíselným řešením $k = -\frac{1}{2}$.

Závěr. Jediným řešením zadané soustavy rovnic je dvojice $(x, y) = (1011, \frac{1}{3})$.

Poznámka. Odvozenou rovnici (1) lze řešit také tak, že obecné reálné číslo y zapíšeme ve tvaru $y = k + r$, kde $k = \lfloor y \rfloor$ a číslo $r \in \langle 0, 1)$ je tzv. zlomková část čísla y. Dosazením do (1) dostaneme rovnici

$$3(k + r) - k = 1 \quad \text{neboli} \quad 2k = 1 - 3r.$$

Protože $2k$ je celé číslo dělitelné dvěma a číslo $1 - 3r$ zřejmě leží v intervalu $(-2, 1\rangle$, rovnost těchto čísel nastane v jediném případě, kdy $2k = 1 - 3r = 0$, čili $k = 0$ a $r = \frac{1}{3}$, tj. $y = \frac{1}{3}$.

Jiné řešení. Slovní definice, která je připojena k zadání úlohy, nám říká, že $\lfloor a \rfloor$ je celé číslo, pro něž platí $\lfloor a \rfloor \leqq a$ a zároveň $\lfloor a \rfloor + 1 > a$. Celé číslo $\lfloor a \rfloor$ tak splňuje odhady $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leqq a$, platné pro každé reálné číslo a. Podle nich z první rovnice dané soustavy dostáváme

$$2022 \leqq 2x + y < 2023, \tag{2}$$

podobně z druhé rovnice vychází

$$2023 \leqq 3y + 2x < 2024. \tag{3}$$

Získané nerovnosti můžeme zkombinovat dvěma způsoby. Spojením druhé části (2) s první částí (3) dostaneme $2x + y < 2023 \leqq 3y + 2x$, odkud z porovnání krajních výrazů plyne $y > 0$. Upravíme-li první část (2) na $2024 \leqq 2x + y + 2$, pak ve spojení s druhou částí (3) obdržíme $3y + 2x < 2024 \leqq 2x + y + 2$, takže tentokrát z porovnání krajních výrazů plyne $y < 1$.

Dohromady nám vyšlo $0 < y < 1$, takže platí $\lfloor y \rfloor = 0$. Díky tomu se první rovnice ze zadání redukuje na tvar $2x = 2022$, kterému vyhovuje jediné $x = 1011$. Jeho dosazením do druhé zadané rovnice dostaneme rovnici $3y + 2022 = 2023$ s jediným řešením $y = \frac{1}{3}$, které skutečně splňuje podmínku $\lfloor y \rfloor = 0$ užitou v první rovnici. Dvojice $(x, y) = (1011, \frac{1}{3})$ je proto jediným řešením zadané soustavy rovnic.

POZNÁMKA. Odvození rovnosti $\lfloor y \rfloor = 0$ lze urychlit tak, že první zadanou rovnici odečteme od druhé a výsledek toho odčítání zapíšeme ve tvaru

$$2y = 1 + \bigl(2x - \lfloor 2x \rfloor\bigr) - \bigl(y - \lfloor y \rfloor\bigr).$$

Protože v obou kulatých závorkách napravo jsou čísla z intervalu $\langle 0, 1)$, má zřejmě celá pravá strana hodnotu z intervalu $(0, 2)$. Platí tedy $0 < 2y < 2$ neboli $0 < y < 1$, odkud už plyne $\lfloor y \rfloor = 0$.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\lfloor 3x + 5 \rfloor = 10$. [$x \in \bigl\langle \frac{5}{3}, 2\bigr)$. Reálné číslo x splňuje danou rovnici, právě když $10 \leqq 3x + 5 < 11$. Všechna řešení této soustavy dvou nerovnic tvoří interval $\bigl\langle \frac{5}{3}, 2\bigr)$.]

N2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $x + \lfloor 2y \rfloor = 8$, $\lfloor 3x \rfloor - y = 3$. [$(x, y) = (2, 3)$. Podle první rovnice je číslo x celé, podle druhé je rovněž číslo y celé. Tím pádem $\lfloor 2y \rfloor = 2y$ a $\lfloor 3x \rfloor = 3x$, takže máme soustavu $x + 2y = 8$, $3x - y = 3$. Ta má jediné řešení $(x, y) = (2, 3)$, což je i řešení původní soustavy (neboť obě čísla x, y vyšla celá).]

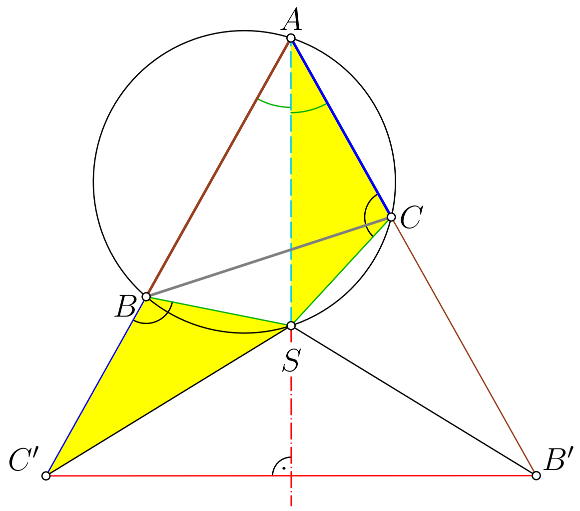
D1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $3x + \lfloor y \rfloor = 10$, $\lfloor 4x \rfloor + x + y = 17$. [Dvě řešení $(x, y) = \bigl(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\bigr)$ a $(x, y) = \bigl(\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\bigr)$. Podle první rovnice je číslo $3x$ celé, podle druhé je rovněž číslo $x + y$ celé. Tím pádem nastane jeden ze tří případů: a) Číslo x je celé. Pak i čísla y a $4x$ jsou celá. Dostáváme soustavu $3x + y = 10$, $5x + y = 17$, která však nemá řešení v oboru celých čísel. b) Číslo x je tvaru $x = x' + \frac{1}{3}$, kde x' je celé číslo. Pak $y = y' + \frac{2}{3}$ pro nějaké celé číslo y' a $\lfloor 4x \rfloor = 4x' + 1$. Dostaneme tak soustavu $3x' + y' = 9$, $5x' + y' = 15$ s jediným řešením $(x', y') = (3, 0)$, kterému odpovídá řešení $(x, y) = \bigl(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\bigr)$ původní soustavy. c) Číslo x je tvaru $x = x' + \frac{2}{3}$, kde x' je celé číslo. Pak $y = y' + \frac{1}{3}$ pro nějaké celé číslo y' a $\lfloor 4x \rfloor = 4x' + 2$. Tentokrát nám vyjde soustava $3x' + y' = 8$, $5x' + y' = 14$ s jediným řešením $(x', y') = (3, -1)$, kterému odpovídá řešení $(x, y) = \bigl(\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\bigr)$ původní soustavy.]

D2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic $\lfloor x + y \rfloor = x - y$, $\lfloor 5y + x \rfloor = 5y - x$. [Dvě řešení $(x, y) = (0, 0)$ a $(x, y) = \bigl(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\bigr)$. Jelikož obě čísla $x - y$ a $5y - x$ jsou celá, jejich součet rovný $4y$ je rovněž celé číslo. Proto ze zadaných rovnic plyne $5y - x = \lfloor 5y + x \rfloor = \lfloor 4y + (y + x) \rfloor = 4y + \lfloor y + x \rfloor = 4y + (x - y) = 3y + x$, tj. $5y - x = 3y + x$, odkud nutně $y = x$. Původní soustavu pak lze zapsat jako dvojici rovnic $\lfloor 2x \rfloor = 0$ a $\lfloor 6x \rfloor = 4x$. Této soustavě vyhovují právě ta reálná x, pro něž současně platí $0 \leqq 2x < 1$, $4x \leqq 6x < 4x + 1$ a přitom číslo $4x$ je celé. Protože všechny nerovnice z poslední věty jsou splněny pouze pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2})$, vyhovují právě hodnoty $x = 0$ a $x = \frac{1}{4}$.]

2. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Na polopřímkách opačných k CA a BA leží postupně body B' a C' tak, že $|B'C| = |AB|$ a $|C'B| = |AC|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.*

(Patrik Bak)

Řešení (viz obr. 1). Protože úsečky AB', AC' mají podle zadání tutéž délku $|AB|+|AC|$, je $AB'C'$ rovnoramenný trojúhelník se základnou $B'C'$. Znamená to, že osa úsečky $B'C'$ splývá s osou úhlu BAC. Nechť $S \neq A$ je průsečík této osy s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Dokážeme-li, že S je střed kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$, budeme s řešením hotovi. Jelikož bod S leží na ose strany $B'C'$, máme $|SB'| = |SC'|$. Zbývá proto dokázat, že také $|SA| = |SC'|$.



Obr. 1

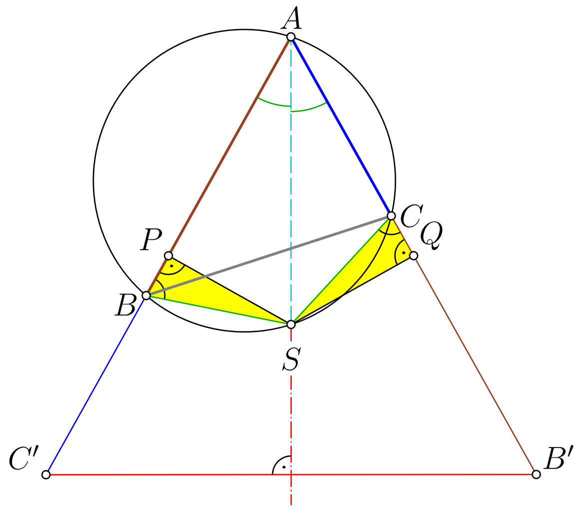
Ze shodnosti obvodových úhlů SAB a SAC plyne, že bod S je středem oblouku BC, a tudíž $|BS| = |CS|$. Kromě toho z tětivového čtyřúhelníku $ABSC$ máme $|\sphericalangle ACS| = 180° - |\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle C'BS|$. Dohromady s rovností $|CA| = |BC'|$ dostáváme, že trojúhelníky SAC a $SC'B$ jsou shodné podle věty *sus*, a proto skutečně platí $|SA| = |SC'|$.

Jiné řešení. Definujme bod S jako v prvním řešení. Tentokrát potřebnou rovnost $|SA| = |SC'|$ ověříme, když ukážeme, že bod S leží na ose úsečky AC'.

Ve speciálním případě, kdy platí $|AB| = |AC|$, je středem úsečky AC' ovšem bod B (podle konstrukce bodu C'); stačí tudíž ověřit, že úhel ABS je pak pravý. To však plyne z toho, že tětivový čtyřúhelník $ABSC$ je tehdy složen ze dvou shodných trojúhelníků ABS a ACS, má tedy úhly u protějších vrcholů B a C shodné, a tedy pravé.

V případě, kdy $|AB| \neq |AC|$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí $|AB| > |AC|$ jako v obrázku 2. V něm P a Q značí kolmé průměty bodu S po řadě na přímky AB, resp. AC. Díky našemu předpokladu $|AB| > |AC|$ leží bod P uvnitř úsečky AB, zatímco bod Q leží na polopřímce opačné k polopřímce CA. V souladu s úvodním odstavcem budeme dokazovat, že bod P je středem úsečky AC'.

Z tětivového čtyřúhelníku $ABSC$ plyne $|\sphericalangle SBP| = |\sphericalangle SBA| = 180° - |\sphericalangle SCA| = |\sphericalangle SCQ|$, tj. vyznačené úhly SBP a SCQ jsou shodné. Díky pravým úhlů BPS a CQS



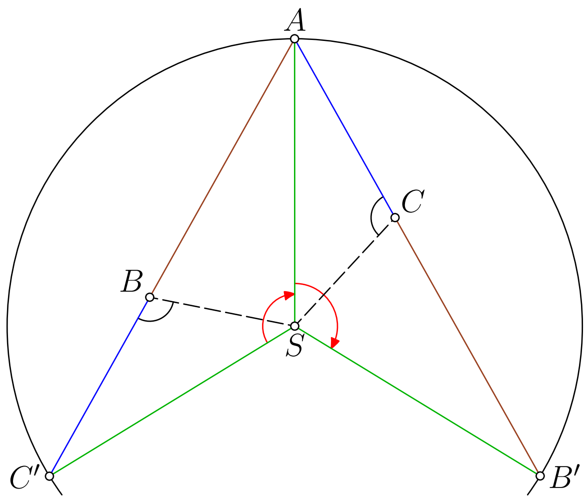
Obr. 2

jsou shodné i úhly PSB a QSC. Kromě toho máme $|PS| = |QS|$, neboť S leží na ose úhlu $C'AB'$. Dostáváme tak, že trojúhelníky PBS a QCS jsou shodné podle věty *usu*. Odtud plyne rovnost $|BP| = |CQ|$. Navíc ze shodných pravoúhlých trojúhelníků ASP a ASQ ještě máme $|AP| = |AQ|$, takže dohromady vychází

$$|AP| = |AQ| = |AC| + |CQ| = |C'B| + |BP| = |C'P|.$$

Bod P je tedy skutečně středem úsečky AC', jak jsme měli dokázat.

JINÉ ŘEŠENÍ (viz obr. 3). Tentokrát označíme S střed kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ a budeme dokazovat, že body A, B, S, C leží na jedné kružnici. Podle úvodu prvního řešení víme, že $AB'C'$ je rovnoramenný trojúhelník se základnou $B'C'$, tudíž střed S kružnice jemu opsané leží na ose úhlu $C'AB'$ neboli BAC. Body B a C proto leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AS, tudíž nám stačí ověřit rovnost $|\sphericalangle ABS| = 180° - |\sphericalangle ACS|$.



Obr. 3

Z rovností $|AC'| = |AB'|$ a $|AS| = |C'S| = |B'S|$ plyne, že trojúhelníky $C'AS$ a $AB'S$ jsou rovnoramenné a shodné podle věty *sss*. Trojúhelník $C'AS$ se tak v otočení se středem S o orientovaný úhel $C'SA$ zobrazí na trojúhelník $AB'S$. Protože B leží na straně $C'A$, C leží na straně AB' a přitom podle zadání platí $|C'B| = |AC|$, zmíněné otočení zobrazuje B na C, a tedy úhel $C'BS$ na úhel ACS. Proto platí $|\sphericalangle C'BS| = |\sphericalangle ACS|$, odkud už plyne $|\sphericalangle ABS| = 180° - |\sphericalangle C'BS| = 180° - |\sphericalangle ACS|$, jak jsme slíbili ukázat.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

N1. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový (tj. jeho vrcholy leží na jedné kružnici), právě když platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$. [a) Nechť vrcholy A, B, C, D leží na kružnici se středem S. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu pak platí $|\sphericalangle ABD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle ACD|$. b) Nechť naopak platí $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD|$. Označme S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABD, ACD. Oba tyto středy leží na ose úsečky AD a ve stejné polorovině s hraniční přímkou AD. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu navíc platí $|\sphericalangle AS_1D| = 2|\sphericalangle ABD| = 2|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle AS_2D|$. Dohromady už dostáváme, že $S_1 = S_2$, takže kružnice opsané trojúhelníkům ABD, ACD splývají.]

N2. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když součet velikostí úhlů ABC a ADC je 180°. [a) Nechť vrcholy A, B, C, D leží na kružnici se středem S. Konvexní a nekonvexní úhel ASC se doplňují do úhlu 360°. Součet velikostí těchto dvou středových úhlů je roven dvojnásobku součtu velikostí obvodových úhlů ABC a ADC, který sám je tudíž roven 180°. b) Nechť naopak platí $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ADC| = 180°$. V případě, kdy oba úhly ABC, ADC jsou pravé, plyne potřebný závěr z Thaletovy věty. V opačném případě můžeme předpokládat, že např. úhel ABC je ostrý a úhel ADC je tupý. Pak uvnitř poloroviny ACB leží jak střed S_1 kružnice opsané trojúhelníku ABC, tak i střed S_2 kružnice opsané trojúhelníku ADC, přitom oba konvexní úhly AS_1C a AS_2C mají po řadě velikosti $2|\sphericalangle ABC|$ a $360° - 2|\sphericalangle ADC|$, které jsou díky předpokladu stejné. Navíc oba body S_1, S_2 leží na ose úsečky AC, takže dohromady dostáváme $S_1 = S_2$, a tedy kružnice opsané trojúhelníkům ABC, ADC splývají.]

N3. Dokažte *tvrzení „o Švrčkově bodu“*: V libovolném trojúhelníku ABC prochází osa vnitřního úhlu BAC středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. [Označme $S \neq A$ druhý průsečík osy úhlu BAC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. V tětivovém čtyřúhelníku $ABSC$ platí $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle BCS|$. To znamená, že BSC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC, tudíž S je střed příslušného oblouku BC. Jinak lze využít obecnější tvrzení: dva obvodové úhly v téže kružnici jsou shodné, právě když jsou shodné oblouky, kterým tyto obvodové úhly odpovídají.]

D1. Dokažte *tvrzení „o třech prstech“*: V daném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a S střed toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém neleží vrchol A. Pak platí $|SB| = |SI| = |SC|$. [Stačí zřejmě dokázat jen jednu rovnost $|SB| = |SI|$. Při standardním značení velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC platí

$$|\sphericalangle SBI| = |\sphericalangle SBC| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle SAC| + \beta/2 = \alpha/2 + \beta/2.$$

Protože SIB je vnější úhel trojúhelníku ABI, platí rovněž

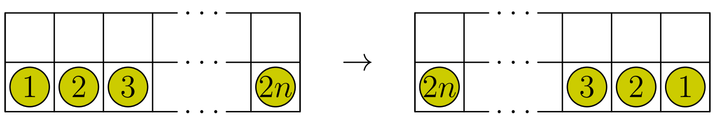
$$|\sphericalangle SIB| = |\sphericalangle IAB| + |\sphericalangle ABI| = \alpha/2 + \beta/2.$$

Trojúhelník SIB tak skutečně má shodná ramena SB a SI.]

D2. Dokažte, že osa vnějšího úhlu při vrcholu A libovolného trojúhelníku ABC prochází středem toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, na kterém leží vrchol A. [Označme $N \neq A$ druhý průsečík osy vnějšího úhlu při vrcholu A s kružnicí opsanou (v případě $|AB| = |AC|$, kdy se tato osa kružnice opsané pouze dotýká, je tvrzení úlohy zřejmé). Uvažme rovněž bod S z úlohy N3. Protože S leží na ose vnitřního úhlu, N na ose vnějšího úhlu a tyto dvě osy jsou navzájem kolmé, platí $|\sphericalangle SAN| = 90°$. Podle Thaletovy věty je pak SN průměrem kružnice opsané. Jelikož S je přitom střed jejího oblouku BC neobsahujícího bod A, N je střed druhého oblouku BC.]

D3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř strany AB leží bod D a na polopřímce opačné k CA leží bod E tak, že $|BD| = |CE|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ADE mají kromě bodu A ještě další společný bod na ose úhlu BAC. [Na polopřímky opačné k CA a BA dokreslíme po řadě body B' a C' určené rovnostmi $|B'C| = |AB|$ a $|C'B| = |AC|$. Podle výsledku soutěžní úlohy střed kružnice opsané $\triangle AB'C'$ leží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Tento výsledek můžeme uplatnit k $\triangle AB'C'$ ještě jednou, když za výchozí vezmeme trojúhelník ADE a přihlédneme k rovnostem $|B'E| = |B'C| - |CE| = |AB| - |BD| = |AD|$ a $|C'D| = |C'B| + |BD| = |AC| + |CE| = |AE|$. Střed kružnice opsané $\triangle AB'C'$ leží proto rovněž na kružnici opsané $\triangle ADE$. Našli jsme tak průsečík kružnic opsaných $\triangle ABC$ a $\triangle ADE$, který je různý od bodu A a který leží na ose úhlu BAC – jde totiž o střed kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ a ten je podle osy úhlu BAC souměrný, neboť obě jeho strany AB', AC' mají délku $|AB| + |AC|$. Jiný postup: Označme S střed kratšího oblouku BC kružnice opsané $\triangle ABC$. Z tětivového čtyřúhelníku $ABSC$ máme $|\sphericalangle DBS| = |\sphericalangle ECS|$, a proto trojúhelníky DBS a ECS jsou shodné podle věty *sus*. Odtud $|\sphericalangle ADS| = 180^\circ - |\sphericalangle SDB| = 180^\circ - |\sphericalangle SEC| = 180^\circ - |\sphericalangle SEA|$, takže podle úlohy N2 je rovněž čtyřúhelník $ADSE$ tětivový.]

3. *Pro dané kladné celé číslo n uvažme obdélníkový hrací plán $2n \times 2$ a na něm $2n$ žetonů očíslovaných $1, 2, \ldots, 2n$ a rozmístěných jako na obrázku vlevo. V jednom tahu je možné posunout jeden žeton z jeho políčka na políčko sousedící stranou, pokud je prázdné. Kolika nejméně tahy lze z původního rozestavení získat rozestavení na obrázku vpravo?*



(Josef Tkadlec)

Řešení. Ukážeme, že nejmenší potřebný počet tahů je roven $2n^2 + 4n - 2$.

Budeme rozlišovat tahy *vodorovné* a tahy *svislé* – podle toho, zda je žeton posunut v řádku, resp. ve sloupci. Potřebné počty vodorovných a svislých tahů odhadneme odděleně.

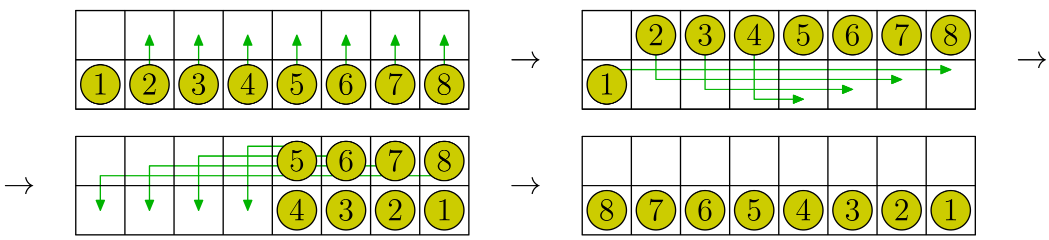
Začneme s vodorovnými tahy. Stejně jako žetony označme i sloupce hracího plánu zleva doprava čísly 1 až $2n$. Žeton 1 je na začátku v sloupci 1 a na konci má být v sloupci $2n$, musíme s ním proto vykonat aspoň $2n - 1$ tahů doprava. Obecně žeton k se dostane ze sloupce k nakonec do sloupce $2n + 1 - k$, a tak v případě $k \leqq n$ je k tomu zapotřebí aspoň $2n + 1 - 2k$ tahů doprava, zatímco v případě $k > n$ aspoň $2k - 2n - 1$ tahů doleva. Celkový počet vodorovných tahů proto nemůže být menší nežli součet

$$\underbrace{(2n-1) + (2n-3) + \ldots + 1}_{\text{za žetony 1 až } n} + \underbrace{1 + \ldots + (2n-3) + (2n-1)}_{\text{za žetony } n+1 \text{ až } 2n} =$$
$$= 2\bigl(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\bigr) = 2n^2.$$

Vodorovných tahů je proto alespoň $2n^2$.

Nyní se zaměřme na svislé tahy. Žeton nazveme *lenivým*, zůstane-li po celý čas v dolním řádku; ostatním žetonům říkejme *akční*. Všimněme si, že nejvýše jeden žeton může být lenivý – každé dva žetony jsou totiž v dolním řádku nakonec v opačném pořadí, než byly na začátku; kdyby tudíž oba byly lenivé, musely by někdy stát na stejném políčku, což není možné. Akčních žetonů je tedy aspoň $2n - 1$ a s každým z nich byly vykonány aspoň 2 svislé tahy – nejdříve nahoru a později dolů. Svislých tahů celkem proto musí být aspoň $2 \cdot (2n - 1) = 4n - 2$.

Dohromady dostáváme, že ke splnění úkolu potřebujeme alespoň $2n^2 + 4n - 2$ tahů. V druhé části řešení ukážeme, že tento počet tahů skutečně stačí.



Obr. 1

Jeden možný postup pro obecné n ilustrujeme obrázkem 1 pro $n = 4$. Nejdříve všech $2n$ žetonů kromě prvního přesuneme do horního řádku. Poté přesuneme žeton 1 po dolním řádku z prvního sloupce do posledního. Následně přesuneme postupně žetony 2 až n; každý z nich nejprve do dolního řádku a vzápětí doprava na poslední volné políčko (jež je jeho cílové). Na závěr přesuneme postupně žetony $n + 1$ až $2n$ – každý nejprve doleva na políčko jeho cílového sloupce a vzápětí do spodního řádku.

Při právě popsaném postupu odpovídají počty svislých i vodorovných tahů přesně těm odhadům, které jsme odvodili v první části řešení: svislých tahů jsme provedli právě $4n-2$ a ani vodorovných tahů jsme s žádným žetonem nevykonali více, než bylo dříve udáno za nutné. Celkový počet tahů při popsaném postupu je tedy skutečně $2n^2 + 4n - 2$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Uvažujme situaci soutěžní úlohy pro $n = 3$. *Vodorovným* nazveme každý tah, při kterém je žeton posunut v řádku. Udejte příklad posloupnosti tahů, kterou splníme cíl úlohy a která přitom obsahuje nejmenší možný počet vodorovných tahů. [Tabulka má šest sloupců, proto s žetonem 1 musíme provést aspoň 5 tahů doprava, s žetonem 2 aspoň 3 doprava, s žetonem 3 aspoň 1 doprava, s žetonem 4 aspoň 1 doleva, s žetonem 5 aspoň 3 doleva a s žetonem 6 aspoň 5 doleva. Celkem tak potřebujeme aspoň 18 vodorovných tahů. Vyhovující příklad s 18 vodorovnými tahy: Nejprve přesuneme žetony 2 až 6 nahoru, pak žeton 1 do jeho cíle, následně žetony 2 až 5 dolů a poté žeton 6 do jeho cíle. Takto jsme vodorovnými tahy pouze s žetony 1, 6 dosáhli toho, že se prohodily. Podobně pak prohodíme žetony 2, 5 a nakonec žetony 3, 4.]

N2. Rovnost $1+2+4+5+\ldots+(3n-2)+(3n-1) = 3n^2$ dokažte pro každé přirozené číslo n. [Užijeme indukci vzhledem k číslu n. Pro $n = 1$ rovnost platí ($1 + 2 = 3 \cdot 1^2$). Platí-li pro nějaké $n = k$, pak pro $n = k + 1$ ji odvodíme takto: $1 + 2 + \ldots + (3k + 1) + (3k + 2) = 3k^2 + (3k + 1) + (3k + 2) = 3k^2 + 6k + 3 = 3(k + 1)^2$. Jiný postup: Sečtěte $2n$ rovností $i + (3n - i) = 3n$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, 3n - 2, 3n - 1\}$ a výslednou rovnost vydělte dvěma.]

N3. Zdůvodněte, že v průběhu tahů vedoucích k cíli soutěžní úlohy se z každých dvou žetonů musí aspoň jeden někdy dostat do horního řádku hracího plánu. [Uvažme žetony i a j, kde $i < j$. Na začátku je i nalevo od j, ale na konci je i napravo od j. Takto by se jejich pořadí v dolním řádku nemohlo vyměnit, kdyby oba žetony byly v tomto řádku pořád.]

D1. Uvažujme stejné počáteční rozestavení $2n$ žetonů jako v soutěžní úloze. Kolika nejméně tahy lze získat rozestavení, kdy opět všechny žetony budou v dolním řádku, avšak žeton 1 se ocitne v posledním sloupci? [$4n$ tahů. V prvním tahu musíme posunout nějaký žeton nahoru a někdy později ho posunout dolů. S žetonem 1 musíme vykonat aspoň $2n - 1$ tahů doprava. Abychom vysvětlili, že celkový počet tahů doleva je rovněž alespoň $2n-1$, označme sloupce zleva doprava čísly 1 až $2n$ a uvažujme proměnnou veličinu, která je rovna součtu $2n$ čísel těch sloupců, ve kterých se jednotlivé z $2n$ žetonů aktuálně nacházejí. Tato veličina má v počátečním i koncovém rozestavení tutéž hodnotu (rovnou $1 + 2 + \cdots + 2n$), s každým tahem doprava vzroste o 1, s každým tahem doleva klesne o 1 a při tazích ve sloupcích se nemění – proto musí být celkové počty tahů doprava a tahů doleva dokonce stejné. Dokázali jsme tak, že tahů všemi směry musí být alespoň $2 + (2n - 1) + (2n - 1) = 4n$. Počet $4n$ tahů stačí: žeton 1 posuneme nahoru, pak všechny ostatní o 1 políčko doleva a nakonec žeton 1 do posledního sloupce a dolů.]

D2. V jedné řádě stojí n žetonů postupně s čísly od 1 do n. V každém tahu můžeme navzájem vyměnit dva sousední žetony. Kolika nejméně tahy lze původní pořadí žetonů změnit na opačné, tj. s čísly od n do 1? [$\frac{n(n-1)}{2}$ tahů. Každou dvojici žetonů musíme někdy (jako sousední dva žetony) přehodit. Protože všech dvojic je $\frac{n(n-1)}{2}$, potřebujeme aspoň $\frac{n(n-1)}{2}$ tahů. Tolik tahů skutečně stačí – přesuneme například nejprve žeton 1 na poslední místo ($n-1$ tahů), pak žeton 2 na předposlední místo ($n-2$ tahů) atd., až nakonec žeton $n-1$

na druhé místo (1 tah). Tak vykonáme právě $(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$ tahů.]

D3. V situaci ze soutěžní úlohy je tentokrát v dolním řádku rozmístěno $2n$ žetonů s čísly 1, 2,… $2n$ *v libovolném pořadí*. Kolika nejméně tahy lze vždy dosáhnout toho, aby všech $2n$ žetonů bylo v dolním řádku rozmístěno *vzestupně*, tj. v pořadí jako na začátku původní úlohy? [Tento počet je stejný jako počet tahů v soutěžní úloze (který zde prozrazovat nebudeme). Nejprve dokážeme matematickou indukcí následující tvrzení. *Nechť k je přirozené číslo. Uvažujme hrací plán $k \times 2$, na kterém je (pouze) v horním řádku nějaký počet žetonů s určitými navzájem různými čísly vybranými z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$. Pak existuje taková posloupnost tahů, která pro každé i přemístí žeton s číslem i (pokud na plánu je) na dolní políčko i-tého sloupce a která k tomu pro každý žeton využije nejmenší možný počet tahů.* Pro $k = 1$ tvrzení zjevně platí. Nechť je nyní $k \geqq 2$ a nechť pro všechny hrací plány $k' \times 2$, kde $k' < k$, tvrzení platí. Na zadaném plánu $k \times 2$ (který splňuje předpoklady tvrzení) vezměme žeton s největším číslem, označme je i, tento žeton posuňme dolů a pak ho přesuňme do i-tého sloupce. Následně díky indukčnímu předpokladu přesuneme na správná místa všechny žetony, které se nacházejí v prvních $i-1$ sloupcích. Poté budeme po jednom zleva přesunovat ještě žetony, které v zadaném plánu $k \times 2$ případně zůstaly od i-tého sloupce napravo: Každý z nich, má-li číslo j, přesuneme nejdříve doleva do j-tého sloupce a potom dolů. Sestavili jsme tak pro zadaný plán $2 \times k$ posloupnost tahů, která má zřejmě všechny potřebné vlastnosti; důkaz indukcí je tak ukončen.

Přejděme k vlastní úloze D3. Při libovolné výchozí situaci s tahy začneme tak, že všechny žetony – kromě toho s číslem $2n$ – posuneme nahoru a pak žeton $2n$ přesuneme na poslední místo (pokud už tam nestál). Následně k žetonům z prvních $2n-1$ sloupců uplatníme posloupnost tahů z dokázaného tvrzení. Nakonec pak na správné místo přesuneme případný žeton z horního políčka posledního sloupce. Při takové konstrukci bude počet tahů největší, budou-li na začátku žetony uspořádány sestupně. V tomto případě optimálnost konstrukce plyne z řešení původní úlohy.]

4. *Jsou dána dvě lichá přirozená čísla k a n. Martin pro každá dvě přirozená čísla i, j splňující $1 \leqq i \leqq k$ a $1 \leqq j \leqq n$ napsal na tabuli zlomek i/j. Určete medián všech těchto zlomků, tedy takové reálné číslo q, že pokud všechny zlomky na tabuli seřadíme podle hodnoty od nejmenší po největší (zlomky se stejnou hodnotou v libovolném pořadí), uprostřed tohoto seznamu bude zlomek s hodnotou q.* (Martin Melicher)

ŘEŠENÍ. Ukážeme, že hledaný medián má hodnotu $q = \dfrac{k+1}{n+1}$. V celém řešení bude q značit právě toto číslo.

Protože daná čísla n a k jsou lichá, zlomek s hodnotou q je na tabuli skutečně zapsán – kupříkladu to je zlomek $\dfrac{\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{2}(n+1)}$.

Podle porovnání s číslem q řekneme, že nějaký zlomek je

- ▷ *malý*, je-li jeho hodnota menší než q,
- ▷ *střední*, je-li jeho hodnota rovna q,
- ▷ *velký*, je-li jeho hodnota větší než q.

Počet $k \cdot n$ všech zapsaných zlomků je lichý; abychom ukázali, že při jejich uspořádání podle velikosti bude mít prostřední zlomek hodnotu q, stačí dokázat, že malých zlomků je na tabuli právě tolik jako těch velkých. (Poslední bude také znamenat, že počet středních zlomků je lichý, což znovu potvrdí jejich existenci.)

Zlomky zapsané na tabuli spárujeme – každý zlomek i/j dáme do dvojice se zlomkem i'/j' (a naopak), právě když bude $i' = k + 1 - i$ a $j' = n + 1 - j$, což lze skutečně přepsat symetricky jako $i + i' = k + 1$ a $j + j' = n + 1$. Uvědomme si, že nerovnosti $1 \leqq i \leqq k$ a $1 \leqq j \leqq n$ zřejmě platí, právě když platí $1 \leqq i' \leqq k$ a $1 \leqq j' \leqq n$. (Právě tyto celočíselné nerovnosti určují množinu zlomků zapsaných jako i/j, resp. i'/j'.)

Je zřejmé, že pouze zlomek z konce druhého odstavce našeho řešení je takto „spárován“ sám se sebou a že všechny ostatní zapsané zlomky jsou skutečně rozděleny do dvojic. Pokud dále ukážeme, že v každé takové dvojici je buď jeden malý a jeden velký zlomek, anebo v ní jsou dva střední zlomky, vyplyne z toho už potřebný závěr, že počet malých zlomků je stejný jako počet velkých zlomků.

Díky zmíněné symetrii stačí ověřit, že při zavedeném označení je zlomek i'/j' malý, právě když je zlomek i/j velký. Ověření cestou ekvivalentních úprav je rutinní:

$$\frac{i'}{j'} < \frac{k+1}{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{k+1-i}{n+1-j} < \frac{k+1}{n+1} \;\Leftrightarrow\; (k+1-i)(n+1) < (k+1)(n+1-j) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (k+1)(n+1) - i(n+1) < (k+1)(n+1) - (k+1)j \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; i(n+1) > (k+1)j \;\Leftrightarrow\; \frac{i}{j} > \frac{k+1}{n+1}.$$

Tím je celé řešení hotovo.

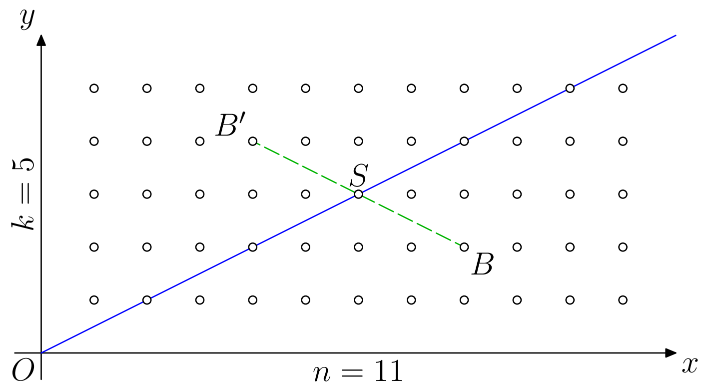
POZNÁMKY.

1. Namísto úprav nerovností v závěru řešení jsme mohli provést tuto úvahu: Vezměme j stejných zlomků i/j a j' stejných zlomků i'/j' – celkem to je $j+j'$ zlomků se součtem $i + i'$, takže jejich aritmetický průměr je roven $(i + i')/(j + j') = (k + 1)/(n + 1) = q$.

Protože jsme ovšem průměrovali nejvýše dvě různé hodnoty, šlo buď o jedinou hodnotu q, nebo o jednu hodnotu menší než q a jednu hodnotu větší než q.

2. Motivaci ke zvolenému párování zlomků i/j a i'/j' poskytuje následující užitečné pravidlo (z návodné úlohy N4): *Pro libovolnou čtveřici reálných čísel a, b, c a d, kde přitom $b > 0$ a $d > 0$, platí implikace*
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$
Při označení z našeho řešení totiž stačí jen rozlišit, který ze dvou zlomků i/j a i'/j' má menší hodnotu, a podle toho uplatnit uvedenou implikaci. Dostaneme tak, že zlomek s menší hodnotou je skutečně malý a že zlomek s větší hodnotou je skutečně velký.

Jiné řešení. Na úlohu se podíváme geometricky – využijeme k tomu rovinu s kartézskou soustavou souřadnic Oxy. V ní každý zlomek i/j, který Martin zapsal na tabuli, znázorníme jako bod B s dvojicí souřadnic $[j, i]$.* Dostaneme tak právě ty body $B[j, i]$ naší roviny, pro které $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Množinu těchto bodů, kterou jsme na obrázku vykreslili pro $n = 11$ a $k = 5$, označíme M a budeme jí dále říkat „mřížka". Má tvar obdélníku s vrcholy $[1, 1]$, $[n, 1]$, $[n, k]$ a $[1, k]$. Protože čísla n, k jsou lichá, má střed S tohoto obdélníku celočíselné souřadnice $j_0 = \frac{1}{2}(n+1)$ a $i_0 = \frac{1}{2}(k+1)$. Střed $S[j_0, i_0]$ je tak sám bodem mřížky M. Dodejme ještě, že přímka OS má směrnici i_0/j_0 a že hodnotu tohoto zlomku stejně jako v prvním řešení označíme q i v závěru tohoto řešení.



Všimněme si, že podle středu S je souměrný nejen zmíněný obdélník, ale souměrná je i samotná mřížka M (na obrázku jsme vyznačili její dva souměrně sdružené body B a B').** Sestrojíme-li proto přímku OS, bude uvnitř každé z obou vyťatých polorovin ležet stejný počet bodů z M. Vyjasněme, čím se tyto stejně početné skupiny bodů „pod přímkou OS" a „nad přímkou OS" liší.

Bod $B[j, i]$ mřížky M leží pod přímkou OS, právě když má přímka OB menší směrnici než přímka OS, tj. právě když platí $i/j < i_0/j_0 = q$. Pod přímkou OS tudíž leží právě ty body $B[j, i]$ mřížky M, které odpovídají *malým* zlomkům i/j, jak jsme jim říkali v prvním řešení. Podobně body mřížky M nad přímkou OS odpovídají *velkým* zlomkům. Tak jsme znovu ověřili potřebné tvrzení, že totiž malých i velkých zlomků je stejný počet.

* Důvodem k takové změně pořadí čísel i a j je, že hodnota dotyčného zlomku i/j se rovná směrnici přímky, která spojuje počátek $O[0, 0]$ právě s bodem $B[j, i]$.

** K tomuto tvrzení, které lze považovat za zřejmé, se ještě vrátíme v poznámce za řešením.

Poznámka. V druhém řešení jsme využili souměrnost se středem $S[j_0, i_0]$. Ta zobrazí každý bod $B[j, i]$ na bod $B'[j', i']$, kde (jak známo z analytické geometrie) platí $j' = 2j_0 - j$ a $i' = 2i_0 - i$. Po dosazení $j_0 = \frac{1}{2}(n+1)$ a $i_0 = \frac{1}{2}(k+1)$ dostaneme symetrické rovnosti $j + j' = n + 1$ a $i + i' = k + 1$. Vidíme, že párování zlomků z prvního řešení je vyjádřením souměrné sdruženosti bodů mřížky M z druhého řešení. Tato dvě řešení tak jsou založena vlastně na stejném nápadu.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Martin napsal na tabuli hodnotu rozdílu $i/j - j/i$ pro každou dvojici přirozených čísel $i \leqq 5$, $j \leqq 5$. Určete medián všech čísel na tabuli. [Medián je 0, protože vždy, když je rozdíl $i/j - j/i$ kladný, je opačný rozdíl $j/i - i/j$ záporný a naopak. Podrobněji: označme $f(i, j) = i/j - j/i$, pak na tabuli je 25 čísel, z nich 5 – $f(1, 1)$, $f(2, 2)$, $f(3, 3)$, $f(4, 4)$ a $f(5, 5)$ – je rovno 0. Zbylých 20 čísel rozdělíme do 10 dvojic: každé číslo $f(i, j)$, kde $i \neq j$, spárujeme s číslem $f(j, i)$. V každé dvojici je zřejmě jedno číslo kladné a jedno číslo záporné. Na tabuli je tak 10 čísel kladných, 10 záporných a 5 nul. Medián je proto 0.]

N2. Řešte soutěžní úlohu pro případ $k = n$. [V tomto případě je medián 1. Podobně jako v úloze N1 vyčleníme zvlášť zlomky i/i s hodnotou 1 – těch je k, tedy lichý počet. Ostatní zlomky zase rozdělíme do dvojic: každý zlomek i/j spárujeme s převráceným zlomkem j/i. V každé dvojici je zřejmě jeden zlomek menší než 1 a jeden zlomek větší než 1. Zlomků menších než 1 je tedy stejný počet jako zlomků větších než 1, takže 1 je medián.]

N3. Řešte soutěžní úlohu pro případ $n = 3$. [V tomto případě je medián $(k + 1)/4$. Na tabuli máme pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ napsány tři zlomky $i/1$, $i/2$, $i/3$. Zaměřme se nejprve na zlomky $i/2$. Protože k je liché, ve vzestupném pořadí těchto zlomků stojí uprostřed zlomek $\frac{1}{2}(1/2 + k/2) = (k + 1)/4$, který tak je jejich mediánem. Porovnáme s ním nyní ostatních $2k$ zlomků $i/1$ a $i/3$ s čitateli i od 1 do k. Využijeme k tomu jednak ekvivalence

$$\frac{i}{1} < \frac{k+1}{4} \Leftrightarrow (k+1) - i > \frac{3(k+1)}{4} \Leftrightarrow \frac{k+1-i}{3} > \frac{k+1}{4},$$

jednak tytéž ekvivalence s opačnými znaky ostrých nerovností. Plyne z nich, že počet těch zlomků $i/1$, které jsou menší (resp. větší) než $(k + 1)/4$, je stejný jako počet těch zlomků $i/3$, které jsou větší (resp. menší) než $(k + 1)/4$. Odtud už plyne, že $(k + 1)/4$ je hledaný medián všech $3k$ zlomků.]

N4. Dokažte, že pro libovolnou čtveřici reálných čísel a, b, c a d, kde přitom $b > 0$ a $d > 0$, platí implikace

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

[Nerovnosti z pravé strany implikace jsou ekvivalentní s nerovnostmi $a(b + d) < (a + c)b$, resp. $(a + c)d < c(b + d)$. Ty jsou zřejmě obě ekvivalentní s nerovností $ad < bc$, jež je důsledkem nerovnosti z levé strany implikace.]

D1. Napišme na tabuli součet $a + b + c + d + e$ pro každou pětici (a, b, c, d, e) přirozených čísel menších než 6. Určete medián všech 5^5 čísel na tabuli. [Medián je 15. Pětici $(3, 3, 3, 3, 3)$ se součtem 15 dejme stranou a ostatní pětice rozdělme do dvojic tak, že každou pětici (a, b, c, d, e) spárujeme s pěticí $(6 - a, 6 - b, 6 - c, 6 - d, 6 - e)$. V každé dvojici buď obě pětice mají součet 15, nebo jedna pětice má součet menší než 15 a druhá pětice má součet větší než 15.]

D2. Nechť k, n jsou lichá přirozená čísla. Pro každá dvě přirozená čísla $i \leqq k$, $j \leqq n$ napišme na tabuli zlomek $(i-j)/(i+j)$. Určete medián všech těchto zlomků. Využijte k tomu výsledku soutěžní úlohy. [Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c, d platí $(a-b)/(a+b) < (c-d)/(c+d)$, právě když $a/b < c/d$. Z hlediska uspořádání hodnot zlomků je tedy situace na tabuli stejná jako v soutěžní úloze. Označíme-li proto x/y medián ze soutěžní úlohy, bude hledaný medián roven $(x - y)/(x + y)$.]

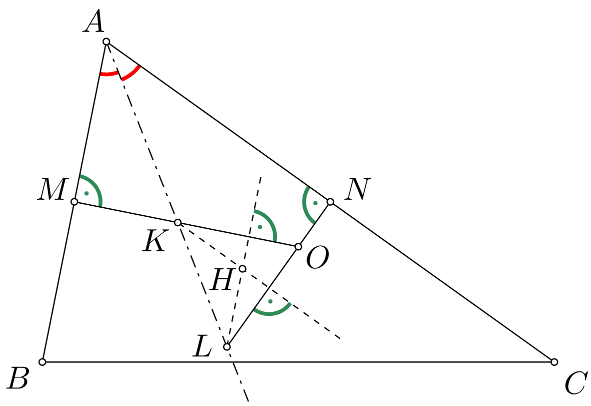
D3. Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všechny její tříprvkové podmnožiny. Rozhodněte, zda je více těch, které mají součin svých prvků větší než 2006, nebo těch, které mají součin svých prvků menší než 2006. [56–A–S–2]

D4. Martin pro každou neprázdnou podmnožinu M množiny $\{0, 1, \ldots, 16\}$ napsal na tabuli zbytek součtu všech prvků z M po dělení číslem 17. Určete, který zbytek má na tabuli největší počet výskytů. [Zbytek 0. Ukážeme, že pokud bychom na tabuli nezapsali zbytek součtu prvků celé množiny $\{0, 1, \ldots, 16\}$, tak každý zbytek od 0 do 16 by měl na tabuli stejný počet výskytů. K důkazu uvažme všechny k-prvkové podmnožiny $\{0, 1, \ldots, 16\}$ s pevným k od 1 do 16. Rozdělme tyto podmnožiny do 17prvkových skupin tak, že v každé skupině budeme mít s každou množinou $\{x_1, \ldots, x_k\}$ následujících 16 množin (sčítání dále chápeme jako operaci se zbytky modulo 17): $\{1+x_1, \ldots, 1+x_k\}$, $\{2+x_1, \ldots, 2+x_k\}, \ldots,$ $\{16+x_1, \ldots, 16+x_k\}$. Zbytky součtů prvků jednotlivých 17 množin v každé skupině tedy budou zbytky $\sum x_i$, $k + \sum x_i$, $2k + \sum x_i$,…, $16k + \sum x_i$. V tomto seznamu zbytků bude každý ze 17 možných zbytků zastoupen právě jednou, a to díky nesoudělnosti čísel k a 17. Protože to platí pro každou vytvořenou skupinu, každý zbytek bude zbytkem součtů prvků stejného počtu k-prvkových podmnožin, a to pro každé k od 1 do 16. Tím je slíbený důkaz hotov. Protože nezahrnutá 17prvková množina $\{0, 1, \ldots, 16\}$ má součet prvků 136 se zbytkem 0, je tento zbytek zapsán na tabuli v počtu o 1 větším než každý jiný ze 16 zbytků.]

D5. *Zlomkovou částí* $\{x\}$ reálného čísla x nazýváme číslo $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí *celou část* čísla x (viz soutěžní úlohu 1). Uvažujme jednak medián čísel $\{\sqrt{1}\}$, $\{\sqrt{2}\}, \ldots,$ $\{\sqrt{999\,999}\}$, jednak medián čísel $\{\sqrt[3]{1}\}$, $\{\sqrt[3]{2}\}, \ldots,$ $\{\sqrt[3]{999\,999}\}$. Který z těchto mediánů je větší? [Větší je druhý medián. Nechť n je přirozené číslo. Všimněme si, že pro celá čísla i od n^2 do $n^2 + n$, kterých je $n + 1$, platí $n \leqq \sqrt{i} < n + \frac{1}{2}$, takže $\{\sqrt{i}\} < \frac{1}{2}$. Podobně pro celá čísla i od $n^2 + n + 1$ do $n^2 + 2n = (n + 1)^2 - 1$, kterých je n, platí $\{\sqrt{i}\} > \frac{1}{2}$. Porovnáním obou počtů i zjišťujeme, že pro *nejtěsnější většinu* celých čísel i z intervalu $\langle n^2, (n + 1)^2 - 1\rangle$ je hodnota $\{\sqrt{i}\}$ menší než $\frac{1}{2}$. Necháme-li n probíhat hodnoty od 1 do 999, uvažované intervaly disjunktně pokryjí celá čísla právě v rozpětí od 1 do 999 999. Proto je v první zadané posloupnosti většina čísel menších než $\frac{1}{2}$, tudíž je takový i jejich medián. Podobně se nyní pro přirozené n podívejme na hodnoty $\{\sqrt[3]{i}\}$ pro celá čísla i z intervalu $\langle n^3, (n+1)^3 - 1\rangle$. Pro uvažované i platí $\{\sqrt[3]{i}\} < \frac{1}{2}$, právě když $i < \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8}$. Počet dotyčných i, které splňují poslední podmínku, je tedy právě $\lfloor \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8} \rfloor + 1$, což nepřevyšuje hodnotu $\frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{9}{8}$, která je díky $n \geqq 1$ menší než $\frac{1}{2}\left[(n + 1)^3 - n^3\right]$. Nerovnost $\{\sqrt[3]{i}\} < \frac{1}{2}$ tak splňuje *menšina* celých čísel i ze zkoumaného intervalu. Vezmeme-li nyní n od 1 do 99, tyto intervaly disjunktně pokryjí celá čísla právě v rozpětí od 1 do 999 999. Proto je v druhé zadané posloupnosti většina čísel větších než $\frac{1}{2}$, tudíž je takový i jejich medián. Dohromady dostáváme, že druhý medián je větší než první.]

5. *Je dán ostroúhlý různostranný trojúhelník ABC. Osa vnitřního úhlu u vrcholu A a osy stran AB, AC vymezují trojúhelník. Dokažte, že průsečík jeho výšek leží na těžnici z vrcholu A.* (Josef Tkadlec)

Řešení. Nechť v daném trojúhelníku ABC značí M střed strany AB, N střed strany AC, K a L průsečíky osy úhlu CAB po řadě s osami stran AB a AC, jejichž průsečík je označen O. Trojúhelník KLO je tedy tím trojúhelníkem, o kterém je řeč v zadání úlohy. Průsečík jeho výšek ještě označíme H. Všechny pojmenované body jsou vyznačeny na obrázku 1 nakresleném pro případ $|AB| < |AC|$. (Případ $|AB| > |AC|$ vypadá analogicky, případ $|AB| = |AC|$ je zadáním vyloučen – body K, L, O tehdy splývají v jeden bod.)



Obr. 1

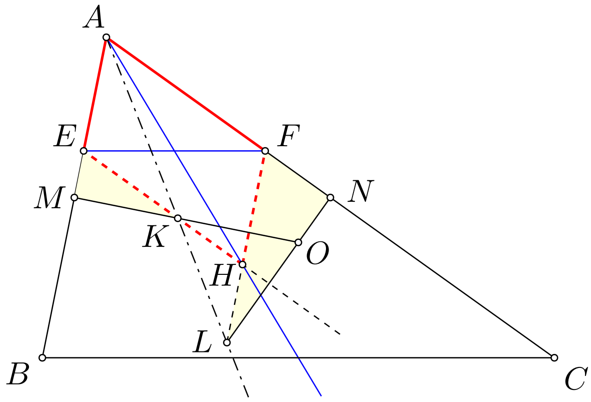
Podle zadání máme dokázat, že bod H leží na těžnici z vrcholu A trojúhelníku ABC. Využijeme k tomu výsledek návodné úlohy N1, podle kterého stačí ukázat, že trojúhelníky ABH a ACH mají stejný obsah.

Díky tomu, že $HL \perp OK \perp AB$, platí $HL \parallel AB$. Bod H tak má od přímky AB stejnou vzdálenost jako bod L. Ta je ovšem rovna délce úsečky LN, neboť bod L leží na ose úhlu CAB a N je kolmý průmět L na AC. Dohromady dostáváme, že obsah prvního trojúhelníku ABH je roven $\frac{1}{2}|AB| \cdot |LN|$. Analogicky zjistíme, že obsah druhého trojúhelníku ACH je roven $\frac{1}{2}|AC| \cdot |KM|$. Zbývá tak dokázat rovnost $|AB| \cdot |LN| = |AC| \cdot |KM|$.

Pro body K a L ležící na ose úhlu CAB platí $|\sphericalangle MAK| = |\sphericalangle NAL|$. Pravoúhlé trojúhelníky AKM a ALN jsou tudíž podobné podle věty *uu*, a proto platí úměra $|KM| : |AM| = |LN| : |AN|$. Odtud s ohledem na $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$ a $|AN| = \frac{1}{2}|AC|$ dostáváme $|KM| : |AB| = |LN| : |AC|$ neboli $|AB| \cdot |LN| = |AC| \cdot |KM|$, jak jsme potřebovali dokázat.

Jiné řešení. Kromě bodů z prvního řešení uvážíme ještě průsečík E přímek AB, KH a F průsečík přímek AC, LH. Opět si povšimneme, že platí $KH \parallel AC$ a $LH \parallel AB$, takže čtyřúhelník $AEHF$ je rovnoběžník (viz obr. 2).

Znovu využijeme také podobnost trojúhelníků AKM a ANL, podle které platí $|KM| : |LN| = |AM| : |AN| = |AB| : |AC|$. Shodnost vnějších úhlů při vrcholech E, F rovnoběžníku $AEHF$ znamená, že $|\sphericalangle KEM| = |\sphericalangle LFN|$. Podobné jsou tak rovněž



Obr. 2

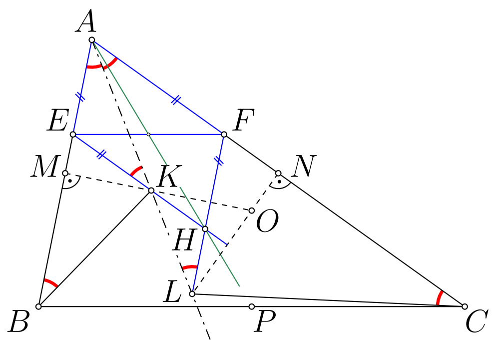
pravoúhlé trojúhelníky EKM a FLN, odkud plyne, že poměr $|EM| : |FN|$ je roven poměru $|KM| : |LN|$, tedy i poměru $|AB| : |AC|$. Proto platí

$$\frac{|AE|}{|AF|} = \frac{|AM| - |EM|}{|AN| - |FN|} = \frac{\frac{|AB|}{|AC|} \cdot |AN| - \frac{|AB|}{|AC|} \cdot |FN|}{|AN| - |FN|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

tudíž trojúhelníky AEF a ABC jsou podobné podle věty *sus* (shodují se v úhlu při vrcholu A a v poměru přilehlých stran). Dostáváme tak rozhodující relaci $EF \parallel BC$.

Protože v rovnoběžníku $AEHF$ přímka AH půlí úhlopříčku EF, půlí tato přímka i úsečku BC, která je totiž s úsečkou EF stejnolehlá podle středu A. Jinak řečeno, bod H leží na těžnici z vrcholu A trojúhelníku ABC, jak jsme měli dokázat.

JINÉ ŘEŠENÍ. Uvážíme body K, L, M, N, O, H, E, F z druhého řešení. Stejně jako tam zdůvodníme, že $AEHF$ je rovnoběžník, a tudíž střed úsečky EF leží na polopřímce AH. Na ní bude ležet i střed P strany BC, pokud dokážeme, že platí $EF \parallel BC$.



Obr. 3

Díky konstrukci ze zadání úlohy a rovnoběžníku $AEHF$ je šest úhlů KAE, KAF, KBA, LCA, AKE a ALF vyznačených na obr. 3 shodných. Podle věty *uu* tak platí $\triangle ABK \sim \triangle ACL$ a $\triangle AKE \sim \triangle ALF$. Podle první podobnosti platí $|AB| : |AC| = |AK| : |AL|$, podle druhé podobnosti je $|AK| : |AL| = |AE| : |AF|$. Dohromady dostáváme $|AB| : |AC| = |AE| : |AF|$, takže podle věty *sus* platí $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, a tudíž $EF \parallel BC$, jak jsme slíbili dokázat.

Poznámka. Ve všech třech řešeních jsme mlčky předpokládali, že H je vnitřní bod trojúhelníku ABC. Plyne to z úvahy o úhlech v třetím řešení, podle které má trojúhelník AEK tupý vnitřní úhel u vrcholu E, takže E leží uvnitř úsečky AM. Obdobně F leží uvnitř úsečky AN. Dohromady to už znamená, že vrchol H rovnoběžníku $AEHF$ je skutečně vnitřním bodem trojúhelníku ABC – leží totiž uvnitř rovnoběžníku $AMPN$.

Návodné a doplňující úlohy:

Úmluva. V řešeních úloh budeme obsah trojúhelníku XYZ značit $[XYZ]$.

N1. Nechť X je vnitřní bod trojúhelníku ABC. Dokažte, že X leží na jeho těžnici z vrcholu A, právě když trojúhelníky ABX a ACX mají stejný obsah. [Označme D průsečík polopřímky AX se stranou BC. Trojúhelníky ADB a ADC mají společnou výšku z vrcholu A, proto $[ADB] : [ADC] = |DB| : |DC|$. Podobně také $[XDB] : [XDC] = |DB| : |DC|$. Dohromady dostáváme

$$\frac{[ABX]}{[ACX]} = \frac{[ADB]-[XDB]}{[ADC]-[XDC]} = \frac{\frac{|DB|}{|DC|}\cdot[ADC] - \frac{|DB|}{|DC|}\cdot[XDC]}{[ADC]-[XDC]} = \frac{|DB|}{|DC|}.$$

Vidíme, že trojúhelníky ABX a ACX mají stejný obsah, právě když $|DB| = |DC|$, tj. právě když D je střed BC neboli AD je těžnice trojúhelníku ABC. Jiný postup: Spojme vnitřní bod X s vrcholy A, B, C a středem D strany BC. Protože $[XBD] = [XCD]$, rovnost $[ABX] = [ACX]$ nastane, právě když $[ABX] + [XBD] = [ACX] + [XCD]$, tedy právě když dvojice úseček AX, XD půlí obsah trojúhelníku ABC. To zřejmě platí, pokud X leží na úsečce AD, a navíc to zřejmě neplatí, leží-li X uvnitř jednoho z trojúhelníků ABD, ACD.]

Úmluva. V úlohách N2–N4 budeme zkoumat situaci ze soutěžní úlohy. Nechť tedy v ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC značí M střed strany AB, N střed strany AC, K a L průsečíky osy úhlu při vrcholu A po řadě s osami stran AB a AC, jejichž průsečík je označen O; konečně H značí průsečík výšek trojúhelníku KLO.

N2. Dokažte, že vzdálenost bodu H od přímky AC je rovna $|KM|$. [Z $KH \perp LN \perp AC$ máme $KH \parallel AC$. Tím pádem vzdálenost H od AC je stejná jako vzdálenost K od AC. Jelikož K leží na ose úhlu BAC, má od AC stejnou vzdálenost jako od AB, tedy $|KM|$.]

N3. Nechť přímka HK protíná stranu AB v bodě E a přímka HL stranu AC v bodě F. Dokažte, že přímka AH dělí úsečku EF na dva shodné úseky. [Platí $HE \parallel AC$ a $HF \parallel AB$, takže $AEHF$ je rovnoběžník. Jeho úhlopříčky EF a AH se proto navzájem půlí.]

N4. Při označení z úlohy N3 dokažte, že trojúhelníky EMK a FNL jsou podobné. [Plyne to z věty *uu*, protože trojúhelníky mají u vrcholů M, N pravé úhly a také jejich úhly u vrchoů E, F jsou shodné (díky rovnoběžníku $AEHF$, viz řešení N3).]

D1. Užitím výsledku úlohy N1 dokažte známé tvrzení, že těžnice libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě. [V trojúhelníku ABC označme T průsečík těžnic z vrcholů B a C. Z úlohy N1 víme, že $[ABT] = [BCT]$ a $[BCT] = [ACT]$, odkud $[ABT] = [ACT]$, tudíž opět podle úlohy N1 bod T leží na těžnici z vrcholu A.]

D2. V trojúhelníku ABC označme D průsečík osy úhlu BAC se stranou BC. Dokažte, že $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$. [Trojúhelníky ABD a ACD mají společnou výšku z vrcholu A, proto $[ABD] : [ACD] = |BD| : |DC|$. Zároveň však mají shodné výšky z vrcholu D, takže $[ABD] : [ACD] = |AB| : |AC|$. Z obou rovností už plyne potřebný závěr.]

D3. Osa úhlu BCA trojúhelníku ABC protne jemu opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C, osu strany BC protne v bodě P a osu strany AC v bodě Q. Střed strany BC označíme K a střed strany AC označíme L. Dokažte, že trojúhelníky RPK a RQL mají stejný obsah. [IMO 2007, úloha 4, řeš. IMO Shortlist 2007, Problem G1.]

6. *Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovanou následovně:*

$$a_1 = 3 \quad a \quad a_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} - 1 \text{ pro všechna } n \geqq 2.$$

Dokažte, že existuje

a) nekonečně mnoho prvočísel dělících alespoň jeden člen této posloupnosti;
b) nekonečně mnoho prvočísel nedělících žádný člen této posloupnosti.

(Martin Melicher)

Řešení. a) Matematickou indukcí nejdříve dokážeme, že $a_n \geqq 2$ pro každé n. Pro $n = 1$ a $n = 2$ to platí, neboť $a_1 = 3$ a $a_2 = 2$. Předpokládejme nyní, že pro některé $n \geqq 3$ nerovnost $a_k \geqq 2$ platí pro každé $k < n$. Podle zadání pak máme $a_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} - 1 \geqq a_1 a_2 - 1 = 5$, takže skutečně $a_n \geqq 2$.

Ukažme nyní, že všechny členy a_n jsou navzájem nesoudělná čísla. Pro libovolné dva indexy $k < n$ totiž platí $a_k \mid a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = a_n + 1$, odkud pro největší společný dělitel D čísel a_n a a_k dostáváme $D \mid a_n$ a zároveň $D \mid a_n + 1$ (neboť $D \mid a_k$ a $a_k \mid a_n + 1$), takže nutně $D = 1$, tedy a_n a a_k jsou nesoudělná čísla.

S ohledem na $a_n \geqq 2$ najdeme pro každý index n prvočíslo, označme ho p_n, pro které $p_n \mid a_n$. Díky tomu, že všechna a_n jsou navzájem nesoudělná, všechna nalezená prvočísla p_n jsou navzájem různá. Tvrzení z části a) je tak dokázáno.

b) Je-li $n \geqq 2$, tak $a_{n+1} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n - 1 = (a_n + 1)a_n - 1 = a_n^2 + a_n - 1$. Dále budeme pracovat s tímto vyjádřením.

Předpokládejme, že platí $p \mid a_n$ pro nějaké $n \geqq 2$ a pro nějaké prvočíslo p. Pak $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 \equiv -1 \pmod p$. Odtud pro další člen a_{n+2} dostaneme $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 \equiv (-1)^2 + (-1) - 1 \equiv -1 \pmod p$, a tak nyní matematickou indukcí docházíme k závěru, že všechny členy a_k s indexy $k \geqq n + 1$ dávají při dělení p stejný zbytek $p - 1$. Pokud uvedený předpoklad $p \mid a_n$ bude pro nějaké $n \geqq 2$ splněn, dané prvočíslo p nazveme *špatné*. Naším úkolem je vlastně najít nekonečně mnoho prvočísel $p \geqq 5$, která nejsou špatná (podmínku $p \geqq 5$ klademe, aby neplatilo $p \mid a_1 = 3$).

Mějme nyní prvočíslo p s vlastností, že pro nějaké $n \geqq 2$ platí $a_n \equiv 1 \pmod p$. Potom $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 \equiv 1^2 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod p$, takže užitím matematické indukce dostáváme, že všechny členy a_k s indexy $k \geqq n$ dávají při dělení p zbytek 1. Tehdy dané p nazveme *dobré*. Všimněme si, že žádné prvočíslo $p \geqq 5$ nemůže být dobré i špatné zároveň – není totiž možné, aby pro dostatečně velká k platily obě relace $a_k \equiv 1 \pmod p$ i $a_k \equiv -1 \pmod p$. Proto nám stačí dokázat, že existuje nekonečně mnoho dobrých prvočísel.

Ke hledání dobrých prvočísel využijeme posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zadanou předpisem $b_n = a_n - 1$ pro každé $n \geqq 1$. Je zřejmě $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ a pro každé $n \geqq 2$ platí

$$\begin{aligned} b_{n+1} = a_{n+1} - 1 &= (a_n^2 + a_n - 1) - 1 = ((b_n + 1)^2 + (b_n + 1) - 1) - 1 = \\ &= b_n^2 + 3b_n = b_n(b_n + 3). \end{aligned}$$

Prvočíslo p je pak dobré, právě když $p \mid b_n$ pro nějaké $n \geqq 2$. Dostali jsme se tak k situaci podobné té, kterou jsme řešili v části a) – potřebujeme dokázat existenci nekonečně mnoha prvočísel dělících aspoň jeden člen nové posloupnosti $(b_n)_{n=2}^{\infty}$ určené prvním členem $b_2 = 1$ a vztahem $b_{n+1} = b_n(b_n + 3)$ pro každé $n \geqq 2$.

Začneme povšimnutím, že $b_k \mid b_n$, pokud $2 \leqq k \leqq n$. Skutečně z $b_{k+1} = b_k(b_k + 3)$ máme $b_k \mid b_{k+1}$ a odtud už indukcí plyne $b_k \mid b_n$ pro každé $n \geqq k$.

Nyní dokážeme, že za předpokladu $2 \leqq k < n$ jsou čísla $b_k + 3$ a $b_n + 3$ nesoudělná. Jejich největší společný dělitel D totiž splňuje $D \mid b_k + 3 \mid b_{k+1} \mid b_n$ a zároveň $D \mid b_n + 3$, takže dohromady $D \mid (b_n + 3) - b_n = 3$, a proto buď $D = 1$, nebo $D = 3$. Zbývá vyloučit hodnotu $D = 3$: S ohledem na $b_2 = 1$ plyne ze vztahu $b_{n+1} = b_n(b_n + 3)$ snadnou indukcí relace $b_n \equiv 1 \pmod 3$ pro každé $n \geqq 2$, takže $3 \nmid b_n$, a proto také $3 \nmid b_n + 3$, a tedy $D \neq 3$.

Konečně víme, že $b_n \geqq 1$ pro každé n (neboť $a_n \geqq 2$), a tedy $b_n + 3 \geqq 4$. Pro každé n tak najdeme prvočíslo p_n s vlastností $p_n \mid b_n + 3$. Všechna tato prvočísla p_n jsou podle předcházejícího odstavce navzájem různá, navíc z $b_n + 3 \mid b_{n+1}$ vyplývá (pro nás klíčová) relace $p_n \mid b_{n+1}$ pro každé $n \geqq 2$. Našli jsme tedy potřebnou nekonečnou posloupnost prvočísel dělících aspoň jeden člen posloupnosti $(b_n)_{n=2}^{\infty}$. Důkaz tvrzení z části b) je ukončen.

POZNÁMKA. Ukážeme, že tvrzení z části a) lze rovněž dokázat sporem. Připusťme tedy, že všech prvočísel, která dělí některý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, je konečný počet – označme je $p_1, \ldots, p_k$. Jistě najdeme tak velký index r, že mezi děliteli prvních r členů $a_1, \ldots, a_r$ jsou všechna prvočísla $p_1, \ldots, p_k$. Pak ovšem následující člen $a_{r+1} = a_1 a_2 \ldots a_r - 1$ je celé číslo, není dělitelné žádným z těchto prvočísel, a to je (s ohledem na nerovnost $a_{r+1} \geqq 2$ z úvodu řešení) spor.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

V úlohách N1–N4 a D1 značí $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost ze zadání soutěžní úlohy.

N1. Dokažte, že každé dva členy a_m, a_n jsou v případě $m \neq n$ dvě nesoudělná čísla. [Je-li $m > n$ neboli $m - 1 \geqq n$, pak z rovnosti $a_m = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m-1} - 1$ plyne $a_n \mid a_m + 1$. Pro největší společný dělitel D čísel a_m, a_n tak platí $D \mid a_m$ a zároveň $D \mid a_n \mid a_m + 1$, takže rovněž $D \mid (a_m + 1) - a_m = 1$, tj. $D = 1$.]

N2. Pro každé $n \geqq 3$ vyjádřete a_n pouze pomocí a_{n-1}. [$a_n = (a_1 a_2 \ldots a_{n-2}) a_{n-1} - 1 = (a_{n-1} + 1) a_{n-1} - 1 = a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1$.]

N3. Nechť $p \geqq 3$ je prvočíslo a nechť $p \mid a_n - 1$ pro nějaké n. Dokažte, že $p \nmid a_m$ platí pro každé $m \geqq n$. [Jelikož $p \geqq 3$ a $a_1 - 1 = 2$, tak $n \neq 1$. Z předpokladu $a_n \equiv 1 \pmod p$ podle výsledku N2 dostáváme $a_{n+1} \equiv a_n^2 + a_n - 1 \equiv 1^2 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod p$. Matematickou indukcí pak získáváme $a_m \equiv 1 \pmod p$ pro každé $m \geqq n$. Relace $p \nmid a_m$ je toho důsledkem.]

N4. Nechť $p \geqq 3$ je prvočíslo a nechť $p \mid a_n - 1$ pro nějaké n. Dokažte, že $p \nmid a_m$ platí pro každé $m < n$. [Připusťme, že naopak $p \mid a_m$ pro nějaké $m < n$. To spolu s rovností $a_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} - 1$ znamená, že $p \mid a_m \mid a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} = a_n + 1$. Dohromady máme $p \mid a_n - 1$ a $p \mid a_n + 1$, a tedy $p \mid (a_n + 1) - (a_n - 1) = 2$, což odporuje předpokladu $p \geqq 3$.]

D1. Dokažte, že čísla $a_m^2 + a_m + 1$ a $a_n^2 + a_n + 1$ jsou v případě $m > n \geqq 2$ nesoudělná. [Nechť p je prvočíslo a $p \mid a_n^2 + a_n + 1$. Jelikož $3 = a_1 \mid a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = a_n + 1$, tak $a_n \equiv 2 \pmod 3$, a proto $a_n^2 + a_n + 1 \equiv 2^2 + 2 + 1 \equiv 1 \pmod 3$, takže $p \neq 3$. Podle výsledku N2 postupně dostáváme $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1 = (a_n^2 + a_n + 1) - 2 \equiv -2 \pmod p$, $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 \equiv (-2)^2 + (-2) - 1 \equiv 1 \pmod p$, $a_{n+3} \equiv 1^2 + 1 - 1 \equiv 1 \pmod p$, dále už matematickou indukcí získáváme $a_k \equiv 1 \pmod p$ pro každé $k \geqq n + 2$. Proto číslo a_m (s indexem $m > n$) dává po dělení p zbytek -2 nebo 1, tudíž číslo $a_m^2 + a_m + 1$ dává zbytek 1 nebo 3. Z toho už plyne potřebný závěr $p \nmid a_m^2 + a_m + 1$, neboť (jak už víme) $p \neq 3$.]

D2. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, z nichž každé je dělitelem součtu $2^{2^n} + 1$ pro nějaké přirozené číslo n. [Opakovaným uplatněním vzorce $2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$

dojdeme k rozkladu $2^{2^n}-1=(2^{2^0}+1)(2^{2^1}+1)\dots(2^{2^{n-1}}+1)$. V případě $0 \leqq n < m$ tak platí $2^{2^n}+1 \mid 2^{2^m}-1$. Největší společný dělitel dvou lichých čísel $2^{2^n}+1$ a $2^{2^m}+1$ je proto také dělitelem čísla $2^{2^m}-1$ a tudíž i čísla $\bigl(2^{2^m}+1\bigr)-\bigl(2^{2^m}-1\bigr)=2$, takže je to nutně číslo 1. Posloupnost $\bigl(2^{2^n}+1\bigr)_{n=0}^{\infty}$ je tudíž složena s navzájem nesoudělných čísel. Přiřadíme-li proto každému n jakýkoli prvočinitel čísla $2^{2^n}+1$, dostaneme nekonečnou posloupnost navzájem různých prvočísel vyhovujících zadání úlohy.]

D3. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, z nichž každé je dělitelem rozdílu $2^{2n-1}-1$ pro nějaké přirozené číslo n. [Nejprve užitím Eukleidova algoritmu dokažte: *Je-li d největší společný dělitel přirozených čísel a a b, pak největším společným dělitelem čísel 2^a-1 a 2^b-1 je číslo 2^d-1.* V důsledku toho platí: Jsou-li p a q dvě různá prvočísla, pak čísla 2^p-1 a 2^q-1 jsou nesoudělná. Vybereme-li proto ke každému lichému prvočíslu p nějaký prvočinitel čísla 2^p-1, dostaneme výběr nekonečně mnoha prvočísel vyhovujících zadání úlohy.]

D4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která nejsou děliteli součtu $2^{2^n}+1$ pro žádné přirozené číslo n. [Vyhovují všechna prvočísla s vlastností ze zadání úlohy D3 (kterých je nekonečně mnoho). Vezměme libovolné z nich, řekněme p, a vyberme k němu dotyčné n s vlastností $p \mid 2^{2n-1}-1$. Připusťme, že pro nějaké přirozené m rovněž platí $p \mid 2^{2^m}+1$. Protože čísla $2n-1$ a 2^{m+1} jsou nesoudělná, díky tvrzení uvedenému v řešení D3 jsou rovněž nesoudělná i čísla $2^{2n-1}-1$ a $2^{2^{m+1}}-1$. Jelikož však $2^{2^m}+1 \mid 2^{2^{m+1}}-1$, z předpokladu $p \mid 2^{2^m}+1$ dostáváme $p \mid 2^{2^{m+1}}-1$, zároveň však $p \mid 2^{2n-1}-1$, tudíž p je společný dělitel dvou nesoudělných čísel, a to je spor.]

D5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, která nejsou děliteli rozdílu $2^{2n-1}-1$ pro žádné přirozené číslo n. [Vyhovují všechna prvočísla s vlastností ze zadání úlohy D2 (kterých je nekonečně mnoho). Důkaz sporem je stejný jako v řešení D4, protože vychází z těchže předpokladů: pro některé prvočíslo p se najdou přirozená čísla m, n taková, že $p \mid 2^{2^m}+1$ a $p \mid 2^{2n-1}-1$.]