# 63. Mezinárodní matematická olympiáda

Mezinárodní matematické olympiáda se letos v červenci po dvouleté pauze konala opět prezenčně, a to v norském hlavním městě Oslo. Třiašedesátého ročníku soutěže se zúčastnilo 589 soutěžících ze 104 zemí celého světa. Čeští soutěžící přivezli jednu stříbrnou a dvě bronzové medaile.

Jako první do Norska přicestovali vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo vybrat šestici úloh pro soutěž z 33 předem připravených návrhů rozdělených v takzvaném shortlistu do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie, teorie čísel). Je potěšující, že mezi těmito 33 návrhy byly i tři české a tři slovenské návrhy. Byť byly všechny tyto návrhy hodnoceny pochvalně, do ostré soutěže se nakonec dostal jen jeden z nich, konkrétně geometrická úloha *Patrika Baka*, a to jako první úloha druhého dne (zadání všech šesti úloh najdete na konci této zprávy).

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí dorazili do Osla o tři dny později. Ubytování bylo zajištěno v hotelech Scandic St. Olavs a Scandic Holberg v centru města. Pro soutěžící bylo k dispozici rovněž přilehlé volnočasové centrum příznačně pojmenované Rebel. Vlastní soutěž proběhla 11. a 12. července na půdě místní univerzity. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tři obtížných úloh. Za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády přiveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3.

Českou republiku reprezentoval šestičlenný tým ve složení *Matouš Šafránek*, *Michal Janík*, *Samuel Rosiar* (všichni z Gymnázia J. Keplera v Praze), *Benedikt Bareš* z Gymnázia Dobruška, *Zdeněk Pezlar* z gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně a *Robert Jaworski* z gymnázia v Praze 8, Ústavní. Robert zastoupil vítěze celostátního kola *Tomáše Flídra* z gymnázia v Kojetíně, který se bohužel nemohl soutěže zúčastnit ze zdravotních důvodů. Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z Harvardovy Univerzity a pedagogickým vedoucím *Michal Rolínek* ze společnosti G-Research, která výpravu rovněž finančně podpořila. Přehled výsledků českého týmu uvádíme v tabulce:

| | | **Body za úlohu** | | | | | | **Body** | **Cena** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Umístění** | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 112.–145. | Matouš Šafránek | 7 | 7 | 0 | 7 | 1 | 7 | 29 | S |
| 214.–229. | Michal Janík | 7 | 7 | 0 | 7 | 5 | 0 | 26 | B |
| 214.–229. | Samuel Rosiar | 6 | 7 | 1 | 7 | 5 | 0 | 26 | B |
| 394.–419. | Zdeněk Pezlar | 7 | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 15 | HM |
| 429.–435. | Benedikt Bareš | 7 | 3 | 0 | 1 | 2 | 0 | 13 | HM |
| 429.–435. | Robert Jaworski | 7 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 13 | HM |
| | Celkem | 41 | 34 | 1 | 23 | 15 | 8 | 122 | |

Matouš k loňské zlaté medaili letos přidal jednu stříbrnou, Samuel a Michal vybojovali bronz, zbylí tři soutěžící (Benedikt, Zdeněk, Robert) získali čestná uznání za bezchybné vyřešení alespoň jedné úlohy. Samuel se tímto výkonem osamostatnil na první příčce síně slávy České Republiky (má po jedné medaili od každého ze tří typů), Matouš sdílí druhé místo.

České reprezentační družstvo ve složení (zleva): Robert Jaworski, Michal Janík (bronz), Matouš Šafránek (stříbro), Samuel Rosiar (bronz), Benedikt Bareš, Zdeněk Pezlar a Michal Rolínek (pedagogický vedoucí).

Pro srovnání uvádíme i výsledky slovenského týmu, kterému se letos dařilo lépe:

| | | **Body za úlohu** | | | | | | **Body** | **Cena** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Umístění** | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 112.–145. | Eliška Macáková | 7 | 7 | 2 | 7 | 5 | 1 | 29 | S |
| 247.–268. | Matej Vasky | 7 | 7 | 1 | 7 | 1 | 1 | 24 | B |
| 247.–268. | Jakub Šošovička | 7 | 7 | 1 | 7 | 2 | 0 | 24 | B |
| 269.–285. | Viktor Balan | 7 | 7 | 0 | 1 | 1 | 7 | 23 | B |
| 269.–285. | Viktor Imrišek | 7 | 7 | 0 | 7 | 2 | 0 | 23 | B |
| 429.–435. | Samuel Koribanič | 5 | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 13 | HM |
| | Celkem | 40 | 42 | 4 | 29 | 12 | 9 | 136 | |

V neoficiálním pořadí států suverénně zvítězila Čína, která se stejně jako několik dalších asijských států kvůli místním koronavirovým opatřením účastnila distančně. Všech šest čínských soutěžících navíc získalo plný počet bodů, což je úžasný výkon, který se naposledy podařil v roce 1994 týmu USA. Kromě čínských studentů na plný počet 42 bodů dosáhli ještě čtyři další soutěžící. Na pomyslné druhé a třetí příčce se těsně za sebou dle očekávání seřadily Korea a USA, překvapením je naopak umístění v první desítce pro Rumunsko (5.) a Německo (7.) – v obou případech po více než 10 letech. Česká republika skončila v (první) polovině startovního pole na 52. příčce o šest příček za Slovenskem. Kompletní výsledky jsou dostupné na adrese `imo-official.org`.

Na závěr zmiňme pár postřehů. Jak naznačuje perfektní výkon čínského týmu, úlohy byly letos snazší než v předchozích letech. Konkrétně druhá úloha byla (co do počtu udělených bodů) nejsnazší dvojkou za posledních 10 let. Totéž platí i o třetí a čtvrté úloze, navíc zbylé tři úlohy byly za posledních deset let "druhé nejsnazší". Na zisk bronzové medaile tak bylo letos potřeba nasbírat bezprecedentních 23 bodů – přitom například loni stačilo na zisk bronzu pouhých 12 bodů a za 24 bodů už se bralo zlato.

Následující ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční v roce 2023 v Japonsku.

## Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

**1.** Banka města Oslo razí mince dvou druhů: aluminiové (značené $A$) a bronzové (značené $B$). Magnus má $n$ aluminiových mincí a $n$ bronzových mincí v řadě v nějakém počátečním pořadí. *Blokem* rozumíme podposloupnost sousedních mincí stejného druhu. Pro dané pevné kladné celé číslo $k \leq 2n$ provádí Magnus opakovaně následující krok: určí nejdelší blok obsahující $k$-tou minci zleva a přesune všechny mince z tohoto bloku na levý konec řady. Například pro $n = 4$, $k = 4$ a počáteční pořadí $AABBBABA$ vypadá proces takto:

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \ldots$$

Najděte všechny dojice $(n, k)$ splňující $1 \leq k \leq 2n$ takové, že pro každé počáteční pořadí se v nějaký okamžik stane, že levých $n$ mincí je stejného druhu. *(Francie)*

**2.** Označme $\mathbb{R}^+$ množinu kladných reálných čísel. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}^+$ splňující

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

*(Nizozemsko)*

**3.** Nechť $k$ je kladné celé číslo a nechť $S$ je konečná množina lichých prvočísel. Dokažte, že existuje nejvýše jeden způsob (až na otočení a překlopení) jak umístit prvky $S$ podél obvodu kruhu tak, aby součin každých dvou sousedních čísel byl tvaru $x^2 + x + k$ pro nějaké kladné celé číslo $x$. *(USA)*

**4.** Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ splňující $|BC| = |DE|$ a uvnitř něj bod $T$, pro který platí $|TB| = |TD|$, $|TC| = |TE|$ a $|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle TEA|$. Přímka $AB$ protne přímky $CD$ a $CT$ postupně v bodech $P$ a $Q$ tak, že body $P$, $B$, $A$, $Q$ leží na přímce v tomto pořadí. Podobně přímka $AE$ protne přímky $CD$ a $DT$ postupně v bodech $R$ a $S$ tak, že body $R$, $E$, $A$, $S$ leží na přímce v tomto pořadí. Dokažte, že body $P$, $S$, $Q$, $R$ leží na jedné kružnici. *(Patrik Bak, Slovensko)*

**5.** Najděte všechny trojice $(a, b, p)$ kladných celých čísel takových, že $p$ je prvočíslo a platí

$$a^p = b! + p.$$

*(Belgie)*

**6.** Nechť $n$ je kladné celé číslo. *Nordický čtverec* je tabulka $n \times n$ vyplněná navzájem různými celými čísly od 1 po $n^2$. Dvě různá políčka považujeme za sousední, pokud sdílejí stranu. Řekneme, že políčko je *dolík*, pokud je v něm menší číslo než ve všech sousedních políčkách. Řekneme, že posloupnost jednoho či více políček je *krpál*, pokud současně platí:

(1) první políčko posloupnosti je dolík,
(2) každé další políčko posloupnosti sousedí s předchozím políčkem,
(3) čísla v políčkách posloupnosti jsou v rostoucím pořadí.

V závislosti na $n$ určete nejmenší možný celkový počet krpálů v nordickém čtverci. *(Srbsko)*