16. Středoevropská matematická olympiáda

Letošní Středoevropská matematická olympiáda (MEMO) se konala na konci srpna ve švýcarském Bernu za účasti 60 soutěžících z tradiční desetice zemí (Česká republika, Chorvatsko, Litva, Maďarsko, Německo, Polsko, Rakousko, Slovensko, Slovinsko, Švýcarsko).

Českou republiku reprezentoval tým vybraný na základě výsledků ústředního kola MO kategorie A a následujícího výběrového soustředění v Kostelci nad Černými lesy. Jeho členy byli *Jakub Štepo* z Gymnázia Kladno, *Šimon Andrš* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Anna Hronová* z Gymnázia Brno na třídě Kapitána Jaroše, *Ondřej Trinkewitz* z Gymnázia a SPŠEI ve Frenštátě pod Radhoštěm, *Tereza Černá* z Gymnázia Litoměřická v Praze a *Adam Červenka* z Gymnázia Brno na třídě Kapitána Jaroše. Českou delegaci vedl *Filip Bialas* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy a jakožto pedagogický vedoucí mu pomáhal *Danil Koževnikov* z University of Edinburgh. Účast našeho týmu byla umožněna díky finanční podpoře MŠMT a Second Foundation, jimž bychom tímto chtěli poděkovat.

Mimo programu matematického připravili místní organizátoři i pestrou řadu doprovodných aktivit pro účastníky, které mimo jiné zahrnovaly i prohlídku historického centra Bernu, včetně pověstných místních věřejných koupališť na řece Aaře, či výlet k nedalekému horskému jezeru Thunersee a výšlap na sousední vrchol Niederhorn. Co se týče samotné soutěže, tak se nejprve konala její individuální část, při níž řešili účastníci po dobu 5 hodin čtyři úlohy z oborů algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel, přičemž za každou z nich bylo možné získat maximum 8 bodů. Druhý soutěžní den byl vyhrazen pro část týmovou, která je třešínkou na dortu odlišující MEMO od ostatních olympiád. Při ní studenti z národních družstev v průběhu 5 hodin spolupracují na řešení osmi náročnějších úloh, po dvou v každé z výše zmíněných oblastí matematiky.

Letošní individuální soutěž se ukázala být o něco obtížnější než obvykle a bylo uděleno 5 zlatých (soutěžícím se ziskem alespoň 24 bodů), 9 stříbrných (od 18 bodů) a 17 bronzových medailí (od 13 bodů). Kromě těchto neobvykle nízkých čísel odráží obtížnost tohoto ročníku i skutečnost, že jedna jediná účastnice, *Reka Wagner* z Německa, dosáhla plného bodového zisku 32 bodů a vysloužila si tímto titul absolutní vítězky. Ve velmi tvrdé konkurenci se české delegaci povedlo vybojovat jedno stříbro a čtyři bronzy, což představuje velmi solidní a historicky nadprůměrný výsledek.

Počty bodů našich soutěžících za jednotlivé úlohy individuální části uvádíme v následující tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	Body	Cena
12.–14.	Jakub Štepo	1	8	8	1	18	S
15.–19.	Šimon Andrš	0	8	1	8	17	B
24.–27.	Anna Hronová	0	6	8	1	15	B
24.–27.	Ondřej Trinkewitz	0	8	1	6	15	B
30.–31.	Tereza Černá	2	1	8	2	13	B
54.– 56.	Adam Červenka	0	5	0	1	6	
	Celkem	3	36	26	19	84	

Dodejme, že se českému družstvu velmi zadařilo ve třetí úloze (geometrii), za níž jsme získali nejvíc bodů ze všesch národních týmů. Naopak úloha čtvrtá (teorii čísel) našim účastníkům ve srovnání s ostatními spíš nesedla.

V týmové soutěži byly výsledky českého týmu bohužel o něco skromnější, takže jsme si ze Švýcarska odvezli čestné 7. místo. Zvítězil tým Polska se ziskem 56 ze 64 možných bodů a za zmínku stojí rovněž to, že Slovenský tým po ne úplně vydařené individuální části (1 bronz a 3 čestná uznání) zvládnul podat skvělý výkon a obsadit bramborovou příčku. Detailní výsledky týmové soutěže uvádíme v následující tabulce:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	7	8	Body	Cena
1.	Polsko	3	5	8	8	8	8	8	8	56	G
2.	Chorvatsko	8	3	8	5	8	8	7	8	55	S
3.	Maďarsko	3	3	8	8	8	8	8	8	54	B
4.	*Slovensko*	3	0	8	3	8	6	8	8	44	
5.	Rakousko	3	1	8	1	8	1	8	8	38	
6.	Německo	1	4	8	0	8	0	8	8	37	
7.	*Česko*	3	4	4	0	0	0	8	8	27	
8.	Švýcarsko	8	0	3	0	2	0	8	1	22	
9.	Litva	3	0	1	0	8	0	8	1	21	
10.	Slovinsko	1	0	8	0	0	0	1	0	10	

Podrobné výsledky a další informace o soutěži můžete najít na stránkách

`https://www.memo-official.org/MEMO/contests/previous/`.

Na závěr dodejme, že se Česku letos zadařilo i v navrhování úloh: od našich autorů pocházely teorie čísel v individuální soutěži a obě algebry v soutěži družstev. V příloze níže můžete najít českou verzi kompletního zadání všech úloh. Po natolik pěkně vydařeném roce se již velmi těšíme na příští ročník MEMO, jenž se bude konat ve slovesnkých Košicích na konci srpna 2023.

Texty úloh individuální soutěže

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Buď $\mathbb{R}$ množina reálných čísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f(x + f(x + y)) = x + f(f(x) + y)$$

pro všechna reálná čísla x, y.

(*Chorvatsko*)

2. Buď n kladné celé číslo. Anička a Bětka hrají hru s balíčkem n karet, které jsou označeny čísly $1, 2, \ldots, n$. Na začátku je balíček zamíchán. Hráčky se střídají v tazích, přičemž Anička začíná. V každém tahu, je-li na vrchní kartě napsáno číslo k, se hráčka podívá na všechny karty a pak přeuspořádá k vrchních karet libovolným způsobem. Pokud je, po přeuspořádání, na vrchní kartě opět napsáno k, tak dotyčná hráčka prohrává a hra končí. V opačném případě přichází na tah její soupeřka. V závislosti na počátečním zamíchání určete, zda-li má některá hráčka vyhrávající strategii, a pokud ano, která.

(*Švýcarsko*)

3. Buď $ABCD$ rovnoběžník s $|\sphericalangle DAB| < 90°$. Nechť $E \neq B$ je bod na přímce BC takový, že $|AE| = |AB|$. Podobně nechť $F \neq D$ je bod na přímce CD takový, že $|AF| = |AD|$. Kružnice opsaná trojúhelníku CEF protíná přímku AE znovu v bodě P a přímku AF znovu v bodě Q. Buď X obraz bodu P v osové souměrnosti podle přímky DE a Y obraz bodu Q v osové souměrnosti podle přímky BF. Dokažte, že body A, X a Y leží na jedné přímce.

(*Švýcarsko*)

4. Na začátku jsou na tabuli napsaná dvě různá kladná celá čísla a a b. V každém kroku Pavel vybere z tabule dvě čísla x a y splňující $x \neq y$ a připíše na ni číslo

$$\mathrm{NSD}(x, y) + \mathrm{nsn}(x, y).$$

Buď n kladné celé číslo. Dokažte, že nezávisle na hodnotách a a b může Pavel provést konečně mnoho kroků tak, aby se na tabuli objevil násobek n.

Poznámka. Pro kladná celá čísla x a y značí $\mathrm{NSD}(x, y)$ jejich největší společný dělitel a $\mathrm{nsn}(x, y)$ jejich nejmenší společný násobek.

(*Česko, Pavel Turek*)

Texty úloh týmové soutěže

1. Pro danou dvojici reálných čísel (a_0, b_0) definujme dvě posloupnosti reálných čísel $a_0, a_1, a_2, \dots$ a $b_0, b_1, b_2, \dots$ předpisy

$$a_{n+1} = a_n + b_n \ \text{ a } \ b_{n+1} = a_n \cdot b_n$$

pro všechna $n = 0, 1, 2, \dots$ Najděte všechny dvojice (a_0, b_0), pro které platí $a_{2022} = a_0$ a $b_{2022} = b_0$.

(*Česko, Danil Koževnikov*)

2. Buď k kladné celé číslo a $a_1, a_2, \dots, a_k$ nezáporná reálná čísla. Na začátku je na tabuli napsána posloupnost $n \geq k$ nul. V každém kroku vybere Vašek k za sebou jdoucích čísel na tabuli a zvětší první z nich o a1, druhé o a_2, a tak dále, dokud nezvýší k-té o a_k. Po kladném počtu kroků se Vaškovi stalo, že jsou si všechna čísla na tabuli rovna. Dokažte, že jsou si všechna nenulová čísla mezi $a_1, a_2, \dots, a_k$ rovna.

(*Česko, Václav Rozhoň*)

3. Buď n přirozené číslo. V řadě za sebou stojí v nějakém pořadí n fialových a n bílých krav. Pastevec Radek je chce uspořádat podle barev, aby všechny fialové krávy stály přede všemi bílými. V každém kroku smí prohodit dvě sousedící stejně velké skupinky za sebou jdoucích krav. Jaký nejmenší počet kroků potřebuje Radek k tomu, aby svoje přání splnil nehledě na počáteční uspořádání krav?

Příklad. Radek může provést například následující tři prohození:

$$B\underline{FB}\overline{FF}B \longrightarrow \underline{B}\overline{F}FFBB \longrightarrow F\underline{BF}\overline{FB}B \longrightarrow FFBBFB.$$

(*Švýcarsko*)

4. Buď n přirozené číslo. Máme danou čtvercovou tabulku $2n \times 2n$. Každé políčko je obarveno jednou z $2n^2$ barev tak, že je každá barva použita právě dvakrát. Jana stojí na některém políčku. Na nějakém jiném leží tabulka čokolády. Jana by se ráda dostala na políčko s čokoládou.

V každém kroku se může pohnout jedním z následujících dvou způsobů: buď může popojít na sousední políčko, nebo se teleportovat na jiné políčko stejné barvy jako to, na kterém zrovna stojí. (Sousedí-li dvě políčka stejné barvy, tak se mezi nimi může Jana přesunout jak přechodem, tak teleportací.) Rozhodněte, zda-li může Jana uspět nezávisle na počáteční konfiguraci, pokud musí po jednom střídat výše popsané způsoby pohybu a začínat teleportací.

Poznámka. Dvě políčka spolu sousedí, pokud spolu sdílí hranu.

(*Maďarsko*)

5. Buď Ω kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Těžnice z bodů B a C protínají Ω znovu v bodech D, resp. E. Tečna ke kružnici Ω v bodě D protíná přímku AC v bodě X a tečna ke kružnici Ω v bodě E protíná přímku AB v bodě Y. Dokažte, že se přímka XY dotýká kružnice Ω.

(*Rakousko*)

6. Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, ve kterém platí $|AC| = |BD|$ a zároveň přímky AB a CD nejsou rovnoběžné. Buď P průsečík úhlopříček AC a BD. Body E a F leží na úsečkách BP, resp. AP, a splňují $|PC| = |PE|$, resp. $|PD| = |PF|$. Ukažte, že se kružnice opsaná trojúhelníku tvořeného přímkami AB, CD a EF dotýká kružnice opsané trojúhelníku ABP.

(*Slovensko*)

7. Buď $\mathbb{N}$ množina kladných celých čísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že platí $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq \ldots$ a zároveň jsou pro každé kladné celé n obě čísla $f(n)+n+1$ a $f(f(n))-f(n)$ druhými mocninami celých čísel.

(*Chorvatsko*)

8. Kladné celé číslo nazveme *ementálové*, pokud můžeme získat aritmetický průměr jeho cifer v de- kadickém zápise tak, že připíšeme desetinnou čárku za jeho první cifru. Dokažte, že existuje pouze konečně mnoho ementálových čísel.

Příklad. Číslo 2250 je ementálové, neboť průměr jeho cifer je $2{,}250$.

(*Maďarsko*)