Matematická olympiáda - 48. ročník (1998/1999)

Komentáře k úlohám třetího kola pro kategorii Z9

Zadání úloh

Z9-III-1

Rovnost $x^2 + y^2 = \overline{aaa}$ můžeme zapsat ve tvaru $x^2 + y^2 = a \,.\, 111$. Pravá strana této rovnosti je dělitelná číslem 3, proto také součet $x^2 + y^2$ na levé straně rovnosti musí být dělitelný číslem 3. Vypíšeme-li všechny mocniny přirozených čísel menší než 999 (viz tab.), zjistíme, že uvedenou podmínku splňují pouze mocniny s ciferným součtem 9 (tj. mocniny 9, 36, 81, 144, 225, 324, 441, 576, 729, 900). Proto i číslo $\overline{aaa}$ bude násobkem čísla 9 (tj. 333, 666, 999). Poté již snadno zjistíme, že platí: $3^2 + 18^2 = 9 + 324 = 333$ a $15^2 + 21^2 = 225 + 441 = 666$.

Úloha má tedy dvě řešení; hledanými čísly *x, y* jsou čísla 3, 18 a 15, 21.

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
441	484	529	576	625	676	729	784	841	900
961	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Poznámka: Úlohu lze řešit rovněž metodou “pokus – omyl” bez nalezení uvedené zákonitosti dělitelnosti 3 resp. 9.

Hodnocení:

maximum 6 bodů (nalezení jednoho řešení 3 body)

Z9-III-2

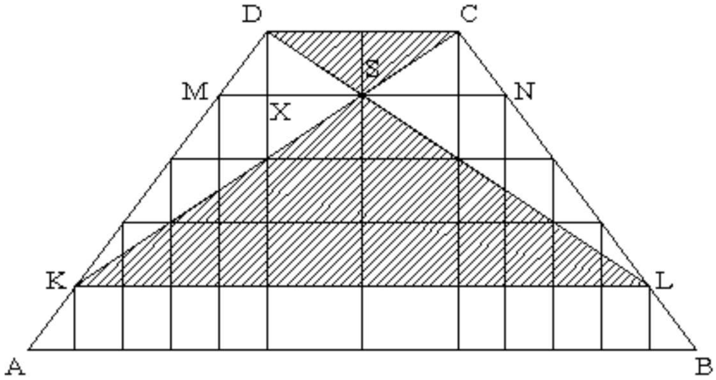
V lichoběžníku *MNCD platí |DM| = |NC| = 5 cm (1/5 z 25 cm), |XD| = 4 cm (1/5 z 20 cm) a |MX|* = 3 cm (podle Pythagorovy věty). Trojúhelníky *KLS a CDS (kde S je pr*ůsečík úseček *KC, LD, MN*) jsou podobné (podle věty *uu) a platí |KL| : |CD| = 3 : 1, tedy |KL| = 3.|CD| (viz obr. 1).*

Pro délky zákla*den lichoběžníku *ABCD* platí zároveň následující vztahy: |*AB| = |KL| + 2.|MX| = 3.|CD| + 6 a |AB| = |CD| + 10.|MX| = |CD|* + 30. Ze vztahů dostaneme |*CD| = 12 cm a |AB| = 42

cm.

Obvod a obsah lichoběžníku *ABCD* vypočteme podle známých vztahů, tedy *o* = *a + b + c + d = 42 + 25 + 12 + 25 = 104 cm,*

S = 1/2(a + c) . v = (42 + 12) . 10 = 540 cm^2.



Obr. 1

Hodnocení:

maximum 6 bodů
objevení podobnosti trojúhelníků 2 body
výpočet délek základen lichoběžníku 2 body
výpočet obvodu a obsahu lichoběžníku 2 body

Z9-III-3

Označme hledaná čísla písmeny *a, b, c, d, e, f, g, h* (viz obr. 2). Pro hledaná čísla platí rovnosti *a = h, b = g, c = f, d = e* (lze odvodit ze vztahů mezi hledanými čísly, popř. ze symetrie obrázku).
Podle pravidla uvedeného v zadání sestavíme vztahy mezi neznámými: *c* = *a* + *b* + *d* + *g* (resp. *c* = *a* + 2*b* + *d*), *a* = 12 + *c*, *d* = 8 + *c*, *b* = 5 + 2*c*.
Po dosazení do prvního vztahu dostaneme *c* = 12 + *c* + 2(5 + 2c) + 8 + *c* a odtud vypočteme *c = – 6.*
Tedy a = h = 6, b = g = – 7, c = f = – 6, d = e = 2.

Řešení je znázorněno na obr. 3.

			4		
		3	a	5	
	2	b	c	d	1
1	e	f	g	2	
	5	h	3		
		4			

Obr. 2

			4		
		3	6	5	
	2	-7	-6	2	1
1	2	-6	-7	2	
	5	6	3		
		4			

Obr. 3

Hodnocení:

maximum 6 bodů
objevení rovností některých neznámých 2 body

sestavení rovnosti pro neznámou *c* **2 body**
výpočet neznámých **2 body**

Z9-III-4

Součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je 360°, tedy platí $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$**. Úpravou tohoto vztahu dostaneme** $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=180^\circ$**. To znamená, že součet dvou protilehlých vnitřních úhlů čtyřúhelníku KLMN (viz obr. 4) je 180°. Mají-li být velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníků ABCD a KLMN shodné, pak musí nastat jedna z těchto tří možností:**

1. $\alpha+\beta=180^\circ \wedge \gamma+\delta=180^\circ$
2. $\alpha+\gamma=180^\circ \wedge \gamma+\delta=180^\circ$
3. $\alpha+\delta=180^\circ \wedge \beta+\gamma=180^\circ$.

Úpravou těchto vztahů dospějeme k závěru, že součty úhlů při vrcholech čtyřúhelníku KLMN jsou rovny 90° (např. $\alpha/2$ **+** $\delta/2$ **= 90°,** $\gamma/2+\delta/2$ **= 90°). Úloha má tedy řešení v případě, že čtyřúhelník ABCD je čtverec, tj.** $\alpha=\beta=\gamma=\delta=90^\circ$ **.**

Obr. 4 ???

Hodnocení:

maximum 6 bodů
objevení vztahu $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=180^\circ$ **2 body**
nalezení tří možností **2 body**
vyvození závěru, že řešením je čtverec **2 body**

[Zadání úloh]