# Matematická olympiáda - 49. ročník (1999/2000)

# Úlohy domácího kola pro kategorie Z5 až Z9

**Z5 – I – 1**

V příkladech nahraďte hvězdičky číslicemi tak, aby jeden výsledek byl o 15 764 větší než druhý.

$$\begin{array}{r} 3{*}56{*} \\ {*}9{*}{*}8 \\ \hline {*}{*}1{*}6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8{*}3{*}{*} \\ -{*}7{*}85 \\ \hline 69{*}4{*} \end{array}$$

*Černeková*

**Z5 – I – 2**

V naší vesnici žije přibližně (zaokrouhleno na desítky) 240 lidí. Modrookých lidí je v ní přesně 8krát méně než těch, kteří modré oči nemají. Kolik obyvatel naší vesnice má modré oči? Kolik je těch, co modré oči nemají?

*Bednářová*

**Z5 – I – 3**

Jeden ze tří čtverců, na které jsme rozdělili obdélník, má obsah 36 cm$^2$. Jaké rozměry mohl mít obdélník?

*Bednářová*

**Z5 – I – 4**

Doplň do tabulky čísla tak, aby součet libovolných tří sousedních čísel v řádku i ve sloupci byl roven 123.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | . | . | . |
| . | . | . | 56 |
| . | 13 | . | . |
| . | . | 18 | . |

*Bednářová*

**Z5 – I – 5**

Adam složil ze 6 tyček rovnostranný trojúhelník. Potom jednu tyčku ztratil a zůstaly mu jen tyčky s délkami 25, 29, 33, 37 a 41 cm. Jakou délku mohla mít tyčka, kterou Adam ztratil? Aby

Adam mohl složit rovnostranný trojúhelník i bez chybějící tyčky, musí jednu ze zbylých tyček rozlámat. Kterou tyčku musí rozlámat a na jak dlouhé části? Podařilo by se mu to i tehdy, kdyby šikovně rozlámal nějakou jinou tyčku?

*Černek*

**Z5 – I – 6**

Včera dostal Ondra od maminky 17 lentilek, dnes o 6 více. Včera snědl o 4 lentilky méně než dnes. Nyní má 8 lentilek. Kolik jich snědl dnes a kolik včera?

*Bednářová*

---

**Z6 – I – 1**

V příkladech nahraďte hvězdičky číslicemi tak, aby jeden výsledek byl sedmkrát větší než druhý.

```
 ***758        *24*08
  962*3      - 7*25*
 ------      -------
 *2****        *5***
```

*Černeková*

**Z6 – I – 2**

Rozdělte čtverec se stranami délky 12 cm na tři obdélníky se stejným obvodem tak, aby tento obvod byl co nejmenší.

*Bednářová*

**Z6 – I – 3**

V cukrárně ”Sladký svět” prodávají malou třicetigramovou a velkou stogramovou čokoládu OTYLKA. Malá OTYLKA stojí 7 Kč a velká 24 Kč.

a) Kolik nejméně korun musí babička mít, aby mohla svým vnukům koupit 750 g čokolády OTYLKA?

b) Jaké největší množství této čokolády může babička koupit, když má jen 110 Kč?

*Bednářová*

**Z6 – I – 4**

Maminka přinesla z obchodu krabici kostkového cukru. Betka snědla nejprve ”horní vrstvu”, tedy 77 kostek cukru, potom jednu ”boční stěnu”, kde bylo 55 kostek, a nakonec ”přední vrstvu”. Kolik kostek cukru ještě zůstalo v krabici?

*Bednářová*

**Z6 – I – 5**

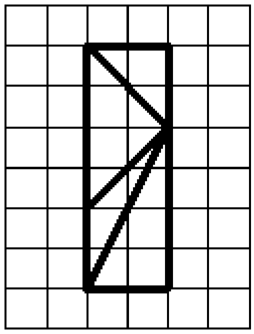
Myslím si čtyřciferné číslo. Poradím ti, že součet prvních dvou číslic je 3, součet posledních dvou číslic je 7 a prostřední dvojčíslí lze dělit čtyřmi beze zbytku. Jaké si myslím číslo? Najdi všechny možnosti.

*Roubíček - Barešová*

**Z6 – I – 6**

Sedm trpaslíků chtělo udělat Sněhurce radost, a proto jí koupili krásné obdélníkové zrcadlo.

Cestou byli neopatrní a rozbili ho na čtyři trojúhelníkové části tak, jak je to znázorněno na obrázku. Chtěli zrcadlo spravit, žádnému se to však nepodařilo. Každý složil jiné čtyřúhelníkové zrcadlo. Nakresli zrcadla, která trpaslíci složili.



*Roubíček*

---

**Z7 – I – 1**

V příkladech nahraďte hvězdičky číslicemi tak, aby jeden výsledek byl 23krát větší než druhý.

$$
\begin{array}{r}
7{*}545{*} \\
45{*}876 \\
\hline
{*}{*}{*}6{*}{*}{*}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
{*}4{*}1{*}0 \\
-294{*}06 \\
\hline
{*}{*}{*}{*}{*}
\end{array}
$$

*Černeková*

**Z7 – I – 2**

Dvorního matematika se zeptali na jeho výdělek za minulý měsíc. Odpověděl takto:

”Když přičítáme k číslu odpovídajícímu mé výplatě v korunách všechna čísla, která lze dostat z původního čísla záměnou pořadí jeho cifer, vyjde nám číslo 4218. Mzdu mi vyplatili v co nejmenším počtu korunových mincí, desetikorun a stokorun.”

a. Kolik ”kusů” mincí a bankovek matematik dostal?
b. Kolik nejméně a kolik nejvíce korun si mohl matematik vydělat?

*Bednářová*

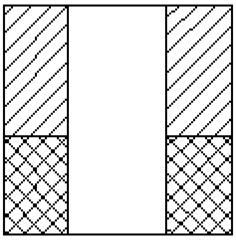
**Z7 – I – 3**

Obdélník a trojúhelník mají stejné obvody. Všechny jejich strany jsou vyjádřeny dvojcifernými čísly, která se ”sesypala” z nákresu na jednu hromadu, takže z nich vznikla tato skupina cifer: 01111123444566. Jaké mohly být původní rozměry obou útvarů? Najdi alespoň tři řešení.

*Ptáčková*

**Z7 – I – 4**

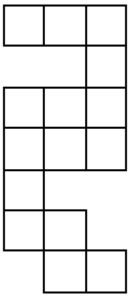
Pavel obarvil třemi barvami stěny kvádru tak, že každá dvojice protilehlých stěn měla stejnou barvu. Potom začal kvádr převalovat po papíru, čímž vznikla barevná ”stopa” (viz náčrt). Zjisti rozměry kvádru, jestliže víš, že tato ”stopa” vytvořila čtverec o obsahu 36 $cm^2$. (Úloha má dvě řešení.)



*Ptáčková*

**Z7 – I – 5**

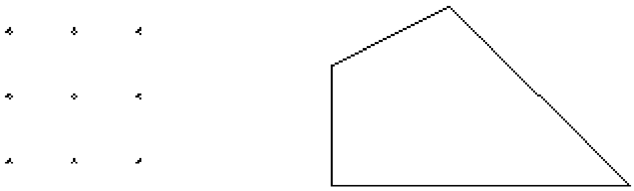
Z obdélníku jsme odstřihli $\frac{11}{16}$ jeho obsahu. Zbyl útvar zakreslený na obrázku. Jaké rozměry mohl mít původní obdélník?



*Vaníček*

**Z7 – I – 6**

Je dáno 9 bodů (viz obrázek). Najdi všechny různé trojúhelníky s vrcholy v těchto bodech. Potom těmito trojúhelníky pokryj plochu čtyřúhelníku na obrázku (trojúhelníky se nesmějí překrývat).



*Ušiaková*

**Z8 - I - 1**

Loď vezla 100 pokladnic. Ve všech byl stejný počet perel. V prvním přístavu piráti tajně odebrali z 1. pokladnice několik perel. Nikdo nic neodhalil, a tak ve 2. přístavu tajně vzali z 2. pokladnice dvakrát více perel než z první. Opět nikdo nic neodhalil, a tak ve 3. přístavu piráti odebrali ze 3. pokladnice třikrát více než vzali z první. Tak to šlo pořád dál, až po posledním odebrání zůstala ve sté pokladnici jen jediná perla. Loď dovezla do cíle jen 24 850 perel. Kolik perel bylo původně v každé pokladnici?

*Volfová*

**Z8 - I - 2**

Myslím si číslo. Záměnou pořadí jeho cifer dokážu vytvořit dalších pět čísel. Sečtu-li je všechny i s původním číslem, dostanu číslo 4 218. Má kamarádka Monika si myslí číslo o 5 větší a když k němu přičte všechna čísla získaná záměnou pořadí jeho číslic, dostane součet 5 328. Jaké číslo si myslím já a jaké Monika?

*Bednářová*

**Z8 - I - 3**

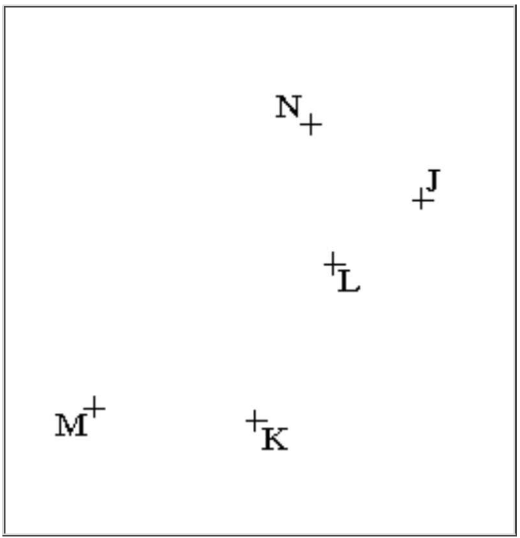
Je dán čtverec *ABCD* a bod *P* tak, že bod *D* je střed úsečky *AP*. Bodem *P* prochází přímka *p*. Ta dělí čtverec na dva útvary, jejichž obsahy jsou v poměru 5 : 3. Narýsujte takovou přímku.

*Hrubý*

**Z8 - I - 4**

Na obrázku jsou dány body *J, K, L, M, N*. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník *ABC* se základnou *AB*, jestliže víte, že body *J, K, L, M, N* leží po řadě na přímkách *AC*, $v_c$, $v_a$, $v_b$, $t_c$. (Popiš konstrukci.)

*Černeková*




**Z8 - I - 5**

Na každé stěně sedmnáctibokého jehlanu je napsáno číslo. Součet všech těchto čísel je 96. Každý vrchol má přiřazeno číslo, získané sečtením čísel na všech stěnách, které tento vrchol obsahují. Zjistili jsme, že všechny vrcholy mají přiřazeno stejné číslo. Jaká čísla jsou na stěnách?

*Černeková*

**Z8 - I - 6**

Najděte všechna čtyřciferná čísla dělitelná sedmi, pro která platí:

součet prvních dvou cifer je 10,

součet prostředních dvou cifer je 10,
součet posledních dvou cifer je 9.

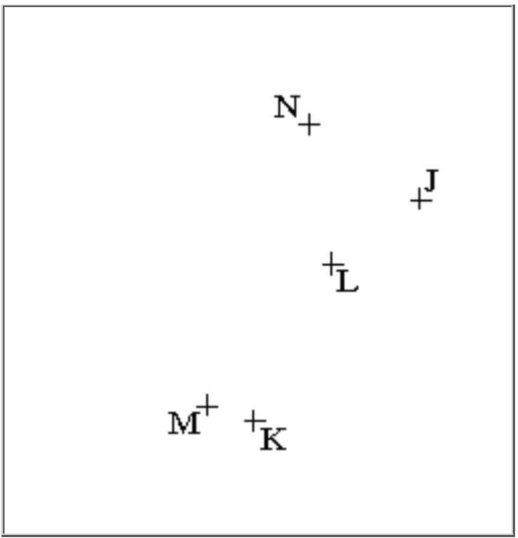
*Krállová*

---

**Z9 - I - 1**

Na obrázku jsou dány body *J, K, L, M, N*. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník *ABC* s přeponou *AB*, jestliže víte, že body *J, K, L, M, N* leží po řadě na přímkách *AB, BC, CA*, $v_c$, $v_c$.

*Černeková*




**Z9 - I - 2**

Najděte čtyřciferné číslo $\overline{abcd}$ s ciframi *a, b, c, d,* pro které platí:

$\overline{ab} : \overline{bc} = 1 : 3$, $\overline{bc} : \overline{cd} = 2 : 1$.

($\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ jsou dvojciferná čísla s ciframi *a, b, c, d*.)

*Krállová, Černek*

**Z9 - I - 3**

Polopřímky AX a BY dělí úhly CAB a ABC trojúhelníku ABC v poměru 1 : 2 a protínají se ve středu kružnice opsané trojúhelníku ABC. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku.

*Černeková*

**Z9 - I - 4**

V Kocourkově nemají haléře. Zato tam mají takový stroj na měnění mincí za papírové bankovky. Nejprve se vhozená částka zaokrouhlí na desítky. Takto získaná hodnota se zaokrouhlí na stovky. A potom ještě na tisíce. Výsledná částka je vyplacena v bankovkách. Honza se rozčiloval, že ho Kocourkovský měnicí stroj pořádně "převezl". Nasypal do něj celý svůj majetek a stroj mu vrátil jen přibližně 69% (zaokrouhleno na celá procenta) toho, co do něj vhodil. Kolik Kocourkovských korun mohl do stroje nasypat?

*Bednářová*

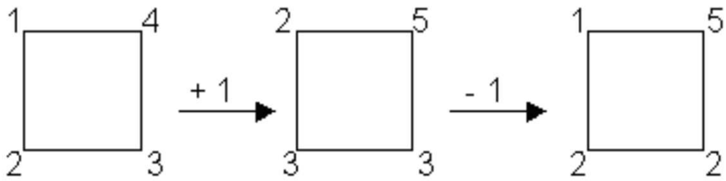
**Z9 - I - 5**

Šestistěn ABCDE vznikl slepením čtyřstěnů ABCD a ABCE. Na každé jeho stěně je napsáno číslo. Každý vrchol má přiřazeno číslo získané sečtením čísel na všech stěnách, které tento vrchol obsahují. Najděte všechna taková očíslování stěn, aby všem vrcholům byla přiřazena stejná čísla, jestliže víte, že dvě sousední stěny jsou popsány čísly 4 a 9. Sousední stěny mají společnou hranu.

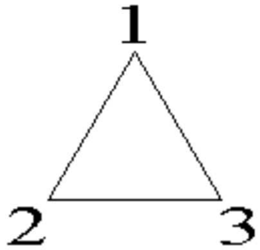
*Černeková*

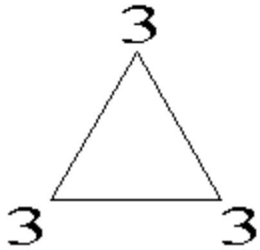
**Z9 - I - 6**

Ve vrcholech čtverce jsou napsána čísla 1, 2, 3, 4. Pavel měnil čísla v trojicích sousedních vrcholů následovně: Buď ke všem třem přičetl 1, nebo ode všech odečetl 1. Čtverec se měnil takto:

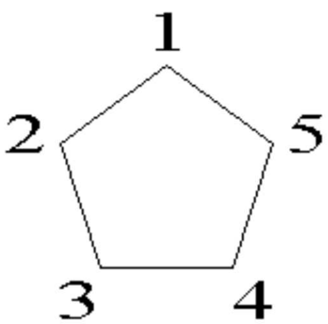



a) Můžeme popsanými operacemi získat čtverec se samými čtyřkami?

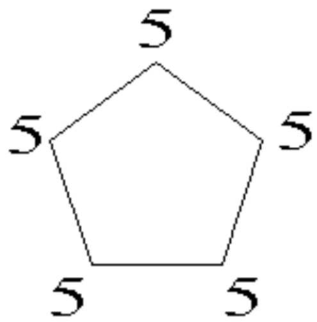
b) Lze z trojúhelníku 

těmito operacemi vytvořit trojúhelník 

?

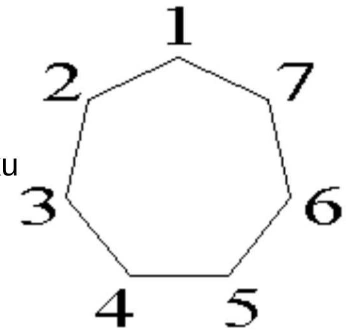
c) Lze z pětiúhelníku 

těmito operacemi vytvořit pětiúhelník

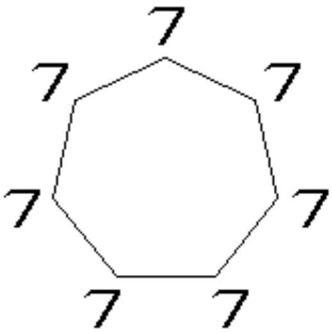



?

d) Lze ze sedmiúhelníku




těmito operacemi vytvořit sedmiúhelník




?

*Žabka*