

Matematická olympiáda - 49. ročník (1999-2000)

Komentáře k úlohám 1. kola pro kategorie Z5 a Z9

KATEGORIE Z5

Z5 – I – 1

V příkladech nahradte hvězdičky číslicemi tak, aby jeden výsledek byl o 15 764 větší než druhý.

$$\begin{array}{r}
 3 * 5 6 * \\
 * 9 * * 8 \\
 \hline
 * * 1 * 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 * 3 * * \\
 - * 7 * 8 5 \\
 \hline
 6 9 * 4 *
 \end{array}$$

(Černeková)

Řešení:

Úlohu řešíme postupným doplňováním číslic do příkladů. Existují dvě řešení:

1. Součet je o 15 764 větší než rozdíl. Potom $69 * 4 * + 15764 = ** 1 * 6$. Odtud dostaneme $69342 + 15764 = 85106$.

Výsledkem je

$$\begin{array}{r}
 3 5 5 6 8 \\
 4 9 5 3 8 \\
 \hline
 8 5 1 0 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 7 3 2 7 \\
 - 1 7 9 8 5 \\
 \hline
 6 9 3 4 2
 \end{array}$$

2. Rozdíl je o 15 764 větší než součet. Potom $** 1 * 6 + 15764 = 69 * 4 *$. Odtud dostaneme $54176 + 15764 = 69940$.

Výsledkem je

$$\begin{array}{r}
 3 4 5 6 8 \\
 1 9 6 0 8 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 7 3 2 5 \\
 - 1 7 3 8 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

5 4 1 7 6

6 9 9 4 0

Z5 – I – 2

V naší vesnici žije přibližně (zaokrouhleno na desítky) 240 lidí. Modrookých lidí je v ní přesně 8krát méně než těch, kteří modré oči nemají. Kolik obyvatel naší vesnice má modré oči? Kolik je těch, kteří modré oči nemají?

*(Bednářová)***Řešení:**

Ve vesnici žije m modrookých lidí a 8-krát víc, tedy $8m$ “nemodrookých” lidí. Dohromady všech lidí je $9m$. Odtud vyplývá, že celkový počet lidí je násobkem čísla 9. Ve vesnici žije při zaokrouhlení na desítky 240 lidí, to znamená, že jich je 235, 236, ..., 243 nebo 244. Z těchto čísel vybereme ta, která jsou dělitelná 9 beze zbytku. Podmínce vyhovuje pouze číslo 243. Ve vesnici tedy žije 243 lidí, z toho $243 : 9 = 27$ modrookých a $243 - 27 = 216$ (resp. $27 \cdot 8 = 216$) “nemodrookých” lidí.

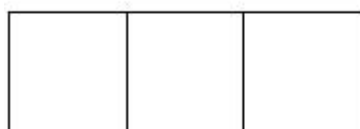
Z5 – I – 3

Jeden ze tří čtverců, na které jsme rozdělili obdélník, má obsah 36 cm^2 . Jaké rozměry mohl mít obdélník?

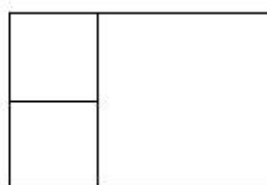
*(Bednářová)***Řešení:**

Obdélník lze rozdělit na tři čtverce dvěma různými způsoby (viz obr. 1, 2). Z obrázku 1 a podmínky, že jeden čtverec má obsah 36 cm^2 , je zřejmé, že všechny čtverce jsou shodné a mají strany dlouhé 6 cm. Rozměry obdélníku tedy jsou 6 cm a $6 \cdot 3 = 18$ cm. Z obrázku 2 a podmínky, že jeden čtverec má obsah 36 cm^2 , je zřejmé, že existují dvě možnosti.

- Má-li menší ze čtverců obsah 36 cm^2 , potom je délka jeho strany 6 cm a délka strany většího čtverce je $6 + 6 = 12$ cm. Rozměry obdélníku jsou 12 cm a $6 + 12 = 18$ cm.
- Má-li větší ze čtverců obsah 36 cm^2 , potom je délka jeho strany 6 cm a délka strany menšího čtverce je $6 : 2 = 3$ cm. Rozměry obdélníku jsou 6 cm a $3 + 6 = 9$ cm.



Obr. 1



Obr. 2

Z5 – I – 4

Doplň do tabulky čísla tak, aby součet libovolných tří sousedních čísel v řádku i ve sloupci byl roven 123.

29	.	.	.
.	.	.	56
.	13	.	.
.	.	18	.

*(Bednářová)***Řešení:**

V každém řádku a v každém sloupci jsou dvě trojice sousedních čísel, které mají dvě čísla (prostřední) společná. Jestliže tyto trojice mají mít stejný součet, musí se shodovat také v krajním čísle. Je tedy možné napsat do všech rohů tabulky číslo 29, do třetího sloupce v prvním řádku číslo 18 a do prvního sloupce v druhém řádku číslo 56. Ostatní čísla dopočítáme tak, aby součet libovolných tří sousedních čísel v řádku i ve sloupci byl roven 123.

29	76	18	29
56	34	33	56
38	13	72	38
29	76	18	29

Z5 – I – 5

Adam složil ze 6 tyček rovnostranný trojúhelník. Potom jednu tyčku ztratil a zůstaly mu jen tyčky s délkami 25, 29, 33, 37 a 41 cm. Jakou délku mohla mít tyčka, kterou Adam ztratil? Aby Adam mohl složit rovnostranný trojúhelník i bez chybějící tyčky, musí jednu ze zbylých tyček rozlámat. Kterou tyčku musí rozlámat a na jak dlouhé části? Podařilo by se mu to i tehdy, kdyby šikově rozlámal nějakou jinou tyčku?

*(Černek)***Řešení:**

a) Adamovi chybí pouze jedna tyčka, to znamená, že ze zbývajících tyček musí být možné složit dvě shodné úsečky (dvě strany původního trojúhelníku). Experimentováním zjistíme, že to lze udělat třemi způsoby:

$$41 + 29 = 33 + 37 = 70, \text{ zůstala tyčka } 25 \text{ cm; ztracená tyčka měří } 70 - 25 = 45 \text{ cm}$$

$$37 + 29 = 41 + 25 = 66, \text{ zůstala tyčka } 33 \text{ cm; ztracená tyčka měří } 66 - 33 = 33 \text{ cm}$$

$25 + 37 = 33 + 29 = 62$, zůstala tyčka 41 cm; ztracená tyčka měří $62 - 41 = 21$ cm

b) Součet délek zbývajících tyček je 165 cm, délka strany nového rovnostranného trojúhelníka je $165 : 3 = 55$ cm. Po rozlámání jedné tyčky zbudou Adamovi ještě čtyři tyčky. Z nich musí být dvě tyčky pohromadě, neboť trojúhelník má tři strany. Mohou to být pouze dvě nejkratší tyčky, neboť pouze jejich součet je menší než 55 cm. Všechny délky úseček tvořených tyčkami je třeba doplnit na 55 cm. To lze třemi způsoby:

Tyčku dlouhou 33 cm by musel rozlámat na úseky dlouhé 1 cm, 14 cm, 18 cm. Tyčku dlouhou 37 cm by musel rozlámat na úseky dlouhé 1 cm, 14 cm, 22 cm. Tyčku dlouhou 41 cm by musel rozlámat na úseky dlouhé 1 cm, 18 cm, 22 cm.

Z5 – I – 6

Včera dostal Ondra od maminky 17 lentilek, dnes o 6 více. Včera snědl o 4 lentilky méně než dnes. Nyní má 8 lentilek. Kolik jich snědl dnes a kolik včera?

(Bednářová)

Řešení:

Dostal-li včera Ondra 17 lentilek a dnes o 6 více, dostal jich dnes 23. Za oba dny dostal $17 + 23 = 40$ lentilek. Nyní jich má 8, to znamená, že jich snědl $40 - 8 = 32$. Číslo 32 je třeba rozdělit na dvě části, přičemž v jedné je o 4 více než v druhé. Ondra tedy snědl včera 14 lentilek a dnes 18 lentilek.