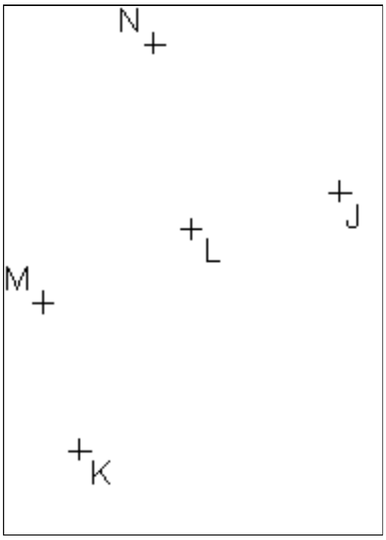
Matematická olympiáda - 49. ročník (1999/2000)

Komentáře k úlohám prvního kola pro kategorii Z9

KATEGORIE Z9

Z9 – I – 1

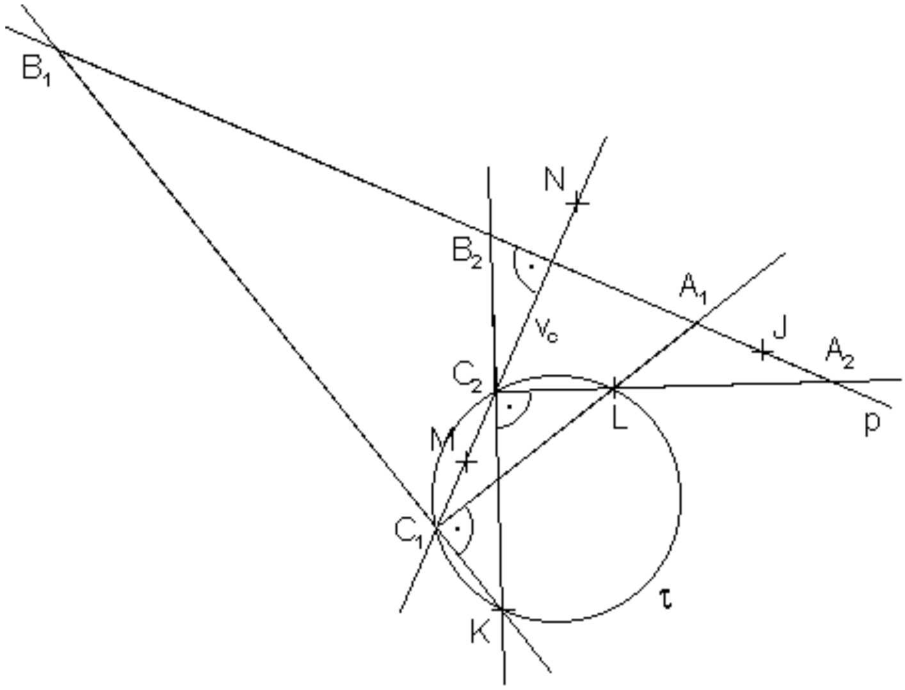
Na obrázku 5 jsou dány body *J*, *K*, *L*, *M*, *N*. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník *ABC* s přeponou *AB*, *jes*tliže víte, že body *J*, *K*, *L*, *M*, *N* leží po řadě na přímkách *AB, BC, CA*, v_c, v_c.



Obr. 5

(*Černeková*)

Řešení:



Obr. 6

Rozbor:
Bod *C* leží na přímce *MN* = v_C a zároveň na Thaletově kružnici s průměrem *KL*, neboť je vrcholem pravého úhlu *ACB*, *resp. KCL. Body A, B* leží na přímce *p*, která je kolmá k přímce *MN* = v_C a prochází bodem *J*. Zároveň bod *A* leží na přímce *CL* a bod *B* na přímce *CK* (viz obr. 6).

Postup konstrukce:

1. $\leftrightarrow MN$
2. τ_{KL}; Thaletova kružnice s průměrem KL
3. $C; C \in \tau_{KL} \cap \leftrightarrow MN$
4. $p; J \in p, p \perp \leftrightarrow MN$
5. $\leftrightarrow CL, \leftrightarrow CK$
6. $A; A \in p \cap \leftrightarrow CL$
7. $B; B \in p \cap \leftrightarrow CK$
8. $\Delta\, ABC$

Poznámka: Za správný považujeme i postup konstrukce zapsaný slovy.

Diskuse: Úloha má pro zadané body dvě řešení (Thaletova kružnice protíná přímku *MN* ve dvou bodech).

Z9 – I – 2

Najděte čtyřciferné číslo $\overline{abcd}$ s ciframi *a*, *b*, *c*, *d*, pro které platí:

$\overline{ab} : \overline{bc} = 1:3$, $\overline{bc} : \overline{cd} = 2:1$

($\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}$ jsou dvojciferná čísla s ciframi *a, b, c, d).*

(Krállová)

Řešení:

Ze zadaných poměrů $\overline{ab} : \overline{bc} = 1 : 3$ a $\overline{bc} : \overline{cd} = 2 : 1$ získáme postupný poměr $\overline{ab} : \overline{bc} : \overline{cd} = 2 : 6 : 3$. Z něj je zřejmé, že číslo $\overline{ab}$ je dělitelné dvěma, číslo $\overline{bc}$ šesti, číslo $\overline{cd}$ třemi a že číslo $\overline{bc}$ je dvojnásobkem čísla $\overline{cd}$, tedy cifry *b* a *c* jsou sudé. Navíc platí $\overline{bc}$ < 100, resp. $2.\overline{cd}$ < 100, tudíž $c \in \{0, 2, 4\}$. Z toho plyne, že $\overline{bc} = 42$ nebo $\overline{bc} = 84$. Zbývající cifry *a* a *d* hledaného čísla určíme ze zadaných poměrů, resp. ze vztahů $\overline{ab} = \overline{bc} : 3$ a $\overline{cd} = \overline{bc} : 2$. Řešením úlohy jsou čísla 1421 a 2842.

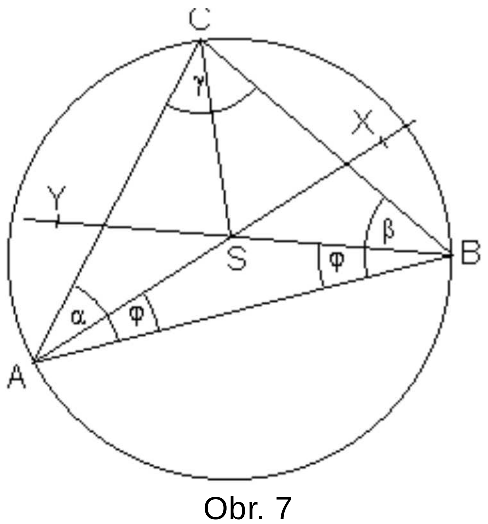
Z9 – I – 3

Polopřímky *AX a BY* dělí úhly *CAB* a *ABC* trojúhelníku *ABC* v poměru 1 : 2 a protínají se ve středu kružnice opsané trojúhelníku *ABC*. Určete velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku.

(*Černeková*)

Řešení:

Je-li bod *S* střed kružnice opsané trojúhelníku *ABC*, pak trojúhelníky *ABS, BCS, CAS* jsou rovnoramenné (viz obr. 7) a vnitřní úhly při jejich základnách jsou shodné.



Obr. 7

Shodné úhly *XAB* a *YBA* označme φ. Existují tyto 4 možnosti dělení úhlů α, β:

1. Jestliže |∢*XAB*| : |∢*XAC*| = 1 : 2 a zároveň |∢*YBA*| : |∢*YBC*| = 1 : 2, pak platí $\alpha = \beta = 3\varphi$, $\gamma = 4\varphi$ a $\alpha + \beta + \gamma = 10\varphi = 180°$, tedy $\varphi = 18°$. Vnitřní úhly trojúhelníku *ABC* mají velikosti $\alpha = \beta = 54°$, $\gamma = 72°$.
2. Jestliže |∢*XAB*| : |∢*XAC*| = 2 : 1 a zároveň |∢*YBA*| : |∢*YBC*| = 2 : 1, pak platí $\alpha = \beta = \frac{3}{2}\varphi$, $\gamma = \varphi$ a $\alpha + \beta + \gamma = 4\varphi = 180°$, tedy $\varphi = 45°$. Vnitřní úhly trojúhelníku *ABC* mají velikosti $\alpha = \beta = \frac{135°}{2}$, $\gamma = 45°$.
3. Jestliže |∢*XAB*| : |∢*XAC*| = 1 : 2 a zároveň |∢*YBA*| : |∢*YBC*| = 2 : 1, pak platí $\alpha = 3\varphi$, $\beta = \frac{3}{2}\varphi$, $\gamma = 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi = \frac{5}{2}\varphi$ a $\alpha + \beta + \gamma = 7\varphi = 180°$, tedy $\varphi = \frac{180°}{7}$. Vnitřní úhly

trojúhelníku *ABC* mají velikosti $\alpha = \frac{540°}{7}$, $\beta = \frac{270°}{7}$, $\gamma = \frac{450°}{7}$.

4. Jestliže |∢*XAB*| *:* |∢*XAC*| = 2 : 1 a zároveň |∢*YBA*| *:* |∢YBC| = 1 : 2, pak platí $\alpha = \frac{3}{2}\varphi$, $\beta = 3\varphi$, $\gamma = \frac{1}{2}\varphi + 2\varphi = \frac{5}{2}\varphi$ *a* $\alpha + \beta + \gamma = 7\varphi = 180°$, tedy $\varphi = \frac{180°}{7}$. Vnitřní úhly trojúhelníku *ABC mají velikosti* , $\alpha = \frac{270°}{7}$, $\beta = \frac{540°}{7}$, $\gamma = \frac{450°}{7}$.

Poznámka: Řešení se podstatně zjednoduší při využití poznatku o středovém a obvodovém úhlu, tj.

$$\gamma = \frac{180° - 2\varphi}{2} = 90° - \varphi.$$

Z9 – I – 4

V Kocourkově nemají haléře. Zato tam mají speciální stroj na měnění mincí za papírové bankovky. Nejprve se vhozená částka zaokrouhlí na desítky. Takto získaná hodnota se zaokrouhlí na stovky. A potom ještě na tisíce. Výsledná částka je vyplacena v bankovkách.

Honza se rozčiloval, že ho Kocourkovský měnicí stroj pořádně “převezl“. Nasypal do něj celý svůj majetek a stroj mu vrátil jen přibližně 69% (zaokrouhleno na celá procenta) toho, co do něj vhodil. Kolik Kocourkovských korun mohl do stroje nasypat?

(*Bednářová*)

Řešení:

Pokud do stroje vhodíme částku 444 korun a menší, stroj nevyplatí nic. Za částku od 445 do 1444 korun dostaneme jednu tisícikorunu, za částku od 1445 do 2444 korun dvě tisícikoruny atd. Kocourkovský stroj vyplatil Honzovi přibližně 69% vhozené částky, tzn. alespoň jednu tisícikorunu.

Označíme-li počet vhozených korun x a počet vyplacených tisícikorun y, pak platí nerovnost 68,5% z x $\leq$ y.1000 < 69,5% z x, tj. 0,685.x $\leq$ y.1000 < 0,695.x, po úpravě y.1438,8 < x $\leq$ y.1459,8. V případě, že stroj vyplatil jednu tisícikorunu, mohl Honza vhodit do stroje částku 1439, 1440, 1441, 1442, 1443 nebo 1444 korun. V případech, kdy stroj vyplatí více tisícikorun než jednu, je vyplacená částka vždy vyšší než 69% vhozené částky.

Honza mohl vhodit do stroje částku od 1439 do 1444 Kocourkovských korun.

Z9 – I – 5

Šestistěn *ABCDE* vznikl slepením čtyřstěnů *ABCD* a *ABCE*. Na každé jeho stěně je napsáno číslo. Každý vrchol má přiřazeno číslo získané sečtením čísel na všech stěnách, které tento vrchol obsahují. Najděte všechna taková očíslování stěn, aby všem vrcholům byla přiřazena stejná čísla, jestliže víte, že dvě sousední stěny jsou popsány čísly 4 a 9.

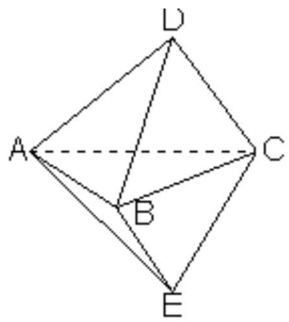
(*Černeková*)

Řešení:

Označíme-li čísla napsaná na stěnách *ABD, BCD, CAD, BAE, CBE, ACE* šestistěnu *ABCDE* (viz obr. 8) po řadě a, b, c, d, e, f a číslo přiřazené všem jeho vrcholům v, pak podle zadání platí následující rovnosti:
$a + b + c = v$, $d + e + f = v$, $a + b + d + e = v$, $b + c + e + f = v$, $c + a + f + d = v$.
Úpravou této soustavy dostaneme vztahy $v = 0$, $a + d = 0$, $b + e = 0$, $c + f = 0$.
To znamená, že každému vrcholu je při všech očíslováních přiřazeno číslo 0 a že stěny, které mají společnou hranu *AB, BC nebo CA*, jsou popsány opačnými čísly.

Stěna *ABD*, kterou volíme jako stěnu, jež je popsána číslem 4, má tři sousední stěny *BCD, CAD, ABE*. Existují tedy tři možnosti očíslování: $a = 4$, $b = 9$ nebo $a = 4$, $c = 9$ nebo $a = 4$, $d = 9$.
Je-li $a = 4$, $b = 9$, pak $c = -13$, $d = -4$, $e = -9$, $f = 13$. Je-li $a = 4$, $c = 9$, pak $b = -13$, $d = -4$, $e = 13$, $f = -9$. Je-li $a = 4$, $d = 9$, pak řešení neexistuje.

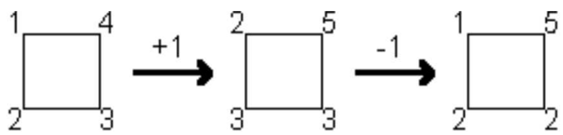
Úloha má pouze dvě uvedená řešení.



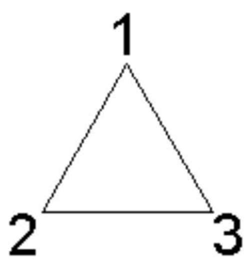
Obr. 8

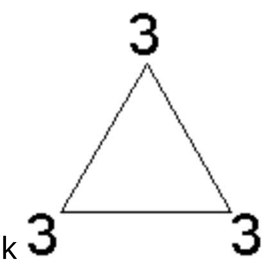
Z9 – I – 6

Ve vrcholech čtverce jsou napsána čísla 1, 2, 3, 4. Pavel měnil čísla v trojicích sousedních vrcholů následovně: Buď ke všem třem přičetl 1, nebo ode všech odečetl 1. Čtverec se měnil takto:

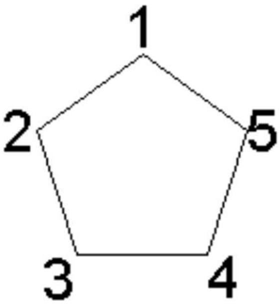


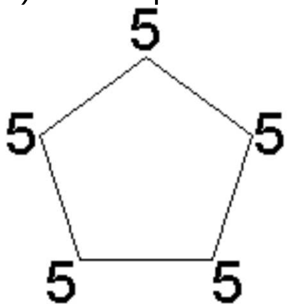
a) Může popsanými operacemi získat čtverec se samými čtyřkami?

b) Může z trojúhelníku 

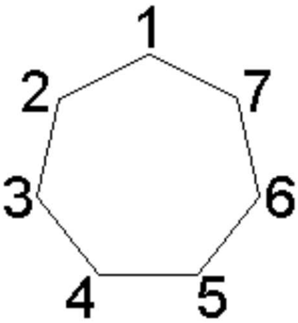
těmito operacemi vytvořit trojúhelník 

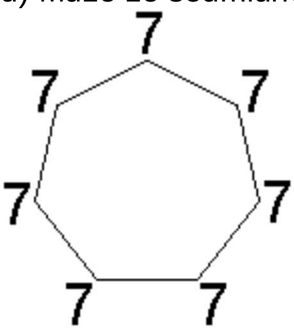
?

c) Může z pětiúhelníku 

těmito operacemi vytvořit pětiúhelník


?

d) Může ze sedmiúhelníku 

těmito operacemi vytvořit sedmiúhelník


?

(*Žabka*)

Řešení:

Zapisujme čísla ve vrcholech *n*-úhelníků ve tvaru uspořádané *n*-tice $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

a) Čtverec požadovaných vlastností můžeme získat například tímto způsobem:
$(1, 2, 3, 4) \to (2, 3, 3, 5) \to (3, 4, 4, 5) \to (4, 5, 5, 5) \to (4, 4, 4, 4)$
nebo v případě, že budeme pokračovat v postupu naznačeném v zadání, takto:
$(1, 2, 3, 4) \to (2, 3, 3, 5) \to (1, 2, 2, 5) \to (1, 1, 1, 4) \to (2, 2, 2, 4) \to (3, 3, 3, 4) \to (4, 4, 4, 4)$.

b) Trojúhelník, který má ve všech vrcholech číslo 3, nelze popsanými operacemi vytvořit, neboť u trojúhelníku se všechna čísla mění najednou – nelze změnit rozdíl čísel ve dvou sousedních vrcholech z 1 nebo 2 na 0.

c) V pětiúhelníku se každou operací součet čísel v jeho vrcholech zvětší nebo zmenší o tři. Výchozí pětiúhelník má součet 15 a požadovaný 25. Rozdíl součtů 25 – 15 = 10 není násobkem čísla 3, proto nelze požadovaný pětiúhelník danými operacemi vytvořit.

d) Sedmiúhelník požadovaných vlastností lze získat například tímto způsobem:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \to (2, 3, 3, 4, 5, 6, 8) \to (3, 4, 4, 4, 5, 6, 8) \to (4, 5, 5, 4, 5, 6, 8) \to$$

$$\to (5, 6, 6, 4, 5, 6, 8) \to (6, 7, 7, 4, 5, 6, 8) \to (7, 8, 8, 4, 5, 6, 8) \to (7, 7, 7, 3, 5, 6, 8) \to$$

$$\to (7, 7, 7, 4, 6, 7, 8) \to (7, 7, 7, 5, 7, 8, 8) \to (7, 7, 8, 6, 8, 8, 8) \to (7, 7, 8, 6, 7, 7, 7) \to$$

$$\to (7, 7, 8, 7, 8, 8, 7) \to (8, 8, 8, 7, 8, 8, 8) \to (7, 7, 7, 7, 8, 8, 8) \to (7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)$$