Matematická olympiáda - 49. ročník (1999-2000)

Komentáře k úlohám 2. kola pro kategorie Z5 až Z9

kategorie Z5

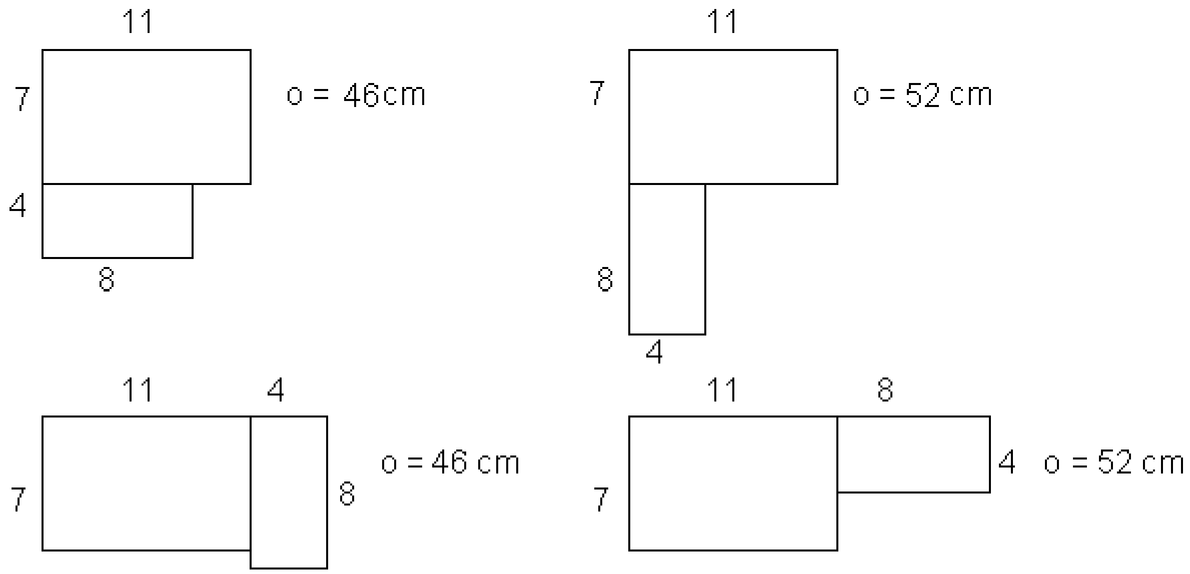
Z5 II 1

Jirka půjčil Mirkovi předevčírem přibližně 230 Kč, tj. 225 234 Kč, včera dalších přibližně 180 Kč, tj. 175 184 Kč. Celkem mu tedy půjčil nejméně 400 a nejvíce 418 Kč. Mirek mu dnes vrátil přibližně 420 Kč, tj. 415 424 Kč a teď mu dluží ještě 3 koruny. To znamená, že si půjčil nejméně 418 a nejvíce 427 Kč. Odtud je zřejmé, že Jirka půjčil Mirkovi přesně 418 Kč. Předevčírem si tedy půjčil 234 Kč a včera 184 Kč.

Hodnocení
rozmezí půjčky z Jirkova pohledu 2 body
rozmezí půjčky z Mirkova pohledu 2 body
celková půjčka 1 bod
půjčka v jednotlivých dnech 1 bod

Z5 II 2

Vojta z daných obdélníků sestavil následující čtyři různé šestiúhelníky (šestiúhelníky otočené nebo souměrné považujeme za shodné).



Hodnocení
dva obrázky po 1 bodu
třetí a čtvrtý obrázek po 2 bodech

Z5 II 3

Milan včera počítal příklad (23 + 19) . 56 = 2352 místo příkladu 23 + 19 . 56 = 1087.
Dnes měl Milan k číslu 75 přičíst několikanásobek čísla 41, měl tedy počítat příklad 75 + *k* . 41. Počítal však příklad

(75 + k) . 41, jehož výsledek byl 3813. Odtud získáváme k = 3813 : 41 75 = 18. Příklad tedy měl být 75 + 18 . 41 = 813.

Hodnocení
správný a chybný výpočet prvního příkladu 2 body
odhalení přičítaného čísla 3 body
správný výsledek druhého příkladu 1 bod

kategorie Z6

Z6 – II – 1

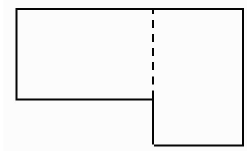
Stojí-li celý lístek na vlak 78 Pk, poloviční stojí 39 Pk. Cesta vlakem tedy Sněhurku a sedm trpaslíků stojí 78 + 7 . 39 = 351 Pk. Za cestu autobusem, na kterou si museli koupit 7 polovičních a jeden celý lístek, jehož cena je rovna ceně dvou polovičních lístků (dohromady platili jako za devět polovičních lístků), museli dohromady zaplatit 729 – 351 = 378 Pk (celková cena bez cesty vlakem). Za jeden poloviční lístek na autobus tedy zaplatili 378 : 9 = 42 Pk, celý lístek stál **84 Pk.**

Hodnocení*:*
celková cena za vlak 1 bod
celková cena za autobus 1 bod
počet polovičních lístků 2 body
cena polovičního lístku na aut. 1 bod
cena celého lístku na aut. 1 bod

Poznámka: Pokud žák umí dělit desetinným číslem, může počítat počet celých lístků (4,5) a nebude tedy počítat cenu za poloviční lístek na autobus. Při takto řešené úloze budou žákovi přiznány dva body za cenu celého lístku na autobus.

Z6 – II – 2

Daný šestiúhelník můžeme rozdělit na dva stejné obdélníky podle obrázku.



Obsah každého z obdélníků je roven polovině obsahu šestiúhelníku, tedy 24 cm^2. Celočíselné délky obdélníků tedy mohou být 1cm a 24 cm, 2 cm a 12 cm, 3 cm a 8 cm, 4 cm a 6 cm. Má-li být obvod šestiúhelníku $o = 2a + 4b$, kde $a < b$, dělitelný čtyřmi, musí být a dělitelné dvěma. To je splněno pouze v případě, že délky stran jsou **2 cm a 12 cm nebo 4 cm a 6 cm.**

Poznámka: Žáci mohou vypočítat jednotlivé obvody a určit jejich dělitelnost čtyřmi.

Hodnocení:
obsah obdélníku 1 bod
všechny možnosti délek stran 2 body
objevení řešení po 1 bodu
vyloučení ostatních možností 1 bod

Z6 – II – 3

Řešení lze zjistit buď výčtem pořadí jednotlivých kuliček v jamce - jsou dva případy: Míša hází jako první, nebo jako druhý. Nebo lze řešit úlohu úvahou, že z prvních dvaceti Míšových hodů skončí v jamce 5 kuliček a z prvních dvaceti Fandových hodů skončí v jamce 4 kuličky, tedy z prvních čtyřiceti hodů skončí v jamce 9 kuliček. Z osmdesáti hodů jich skončí v jamce 18, což je o jednu více, než jich tam mělo být. Je tedy zřejmé, že jeden z kamarádů svou čtyřicátou kuličku nehodil. Celkem hodili kluci 79 kuliček, mimo jamku bylo 79 – 17 = **62 kuliček**.

Hodnocení:
zjištění, že nezáleží na pořadí chlapců 1 bod
celkový počet kuliček 3 body
počet kuliček mimo jamku 2 body

kategorie Z7

Z7 – II – 1
Vybereme-li dva vhodné překrývající se čtverce, např.

1	4	
6		7

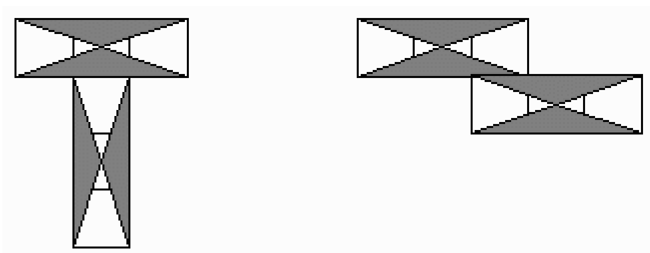
musí být součet v obou čtvercích stejný. Číslo v druhém řádku uprostřed je v obou čtvercích stejné, tedy součet čísel 1, 6 a 4 z prvního čtverce je roven součtu čísel 4, 7 a čísla v prvním řádku vpravo. Odtud plyne, že číslo v prvním řádku vpravo je 0. Podobným způsobem postupujeme dále. Součet v jednotlivých čtvercích je 16. Řešením je následující tabulka.

1	4	**0**	**3**
6	**5**	7	**6**
2	3	**1**	2
7	**4**	8	5

Hodnocení:
součet ve čtverci 2 x 2 3 body
doplnění celé tabulky 3 body

Z7 – II – 2

Příklad lze snadno vyřešit znázorněním na vhodně zvolené síti krychle (viz obr.)



Odtud je zřejmé, že Kuba potřebuje **4 modré a 4 červené** samolepky.

Hodnocení:
nalezení řešení 6 bodů

Z7 – II – 3

Ze správnosti zkoušky je zřejmé, že 2843 je jedním ze sčítanců a číslo 5819 je součet s chybou při počítání přes desítku. Výsledek je stejný, jako když se tato čísla odečtou se stejnou chybou.

$$\begin{array}{r} 5819 \\ -\,2843 \\ \hline 3076 \end{array}$$

Pouze na místě desítek počítáme přes desítku 11 – 4 = 7, ale u stovek nepřipočítáváme jedna, odečítáme tedy rovnou 8 – 8 = 0.

Původní zadání příkladu bylo **2843 + 3076** a správný výsledek měl být **5919.**

Hodnocení:
výsledek je jedním ze sčítanců 2 body

původní zadání *3 body*
správný výsledek *1 bod*

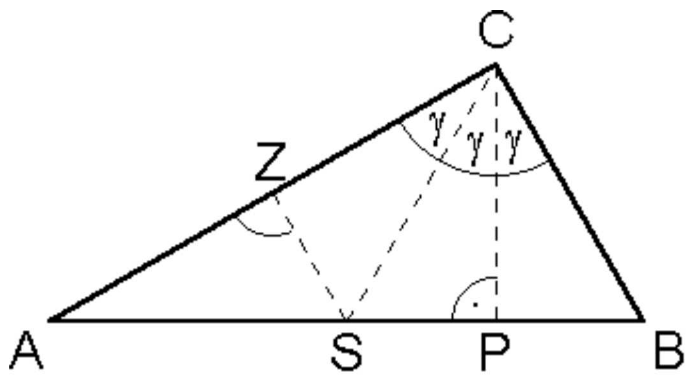
kategorie Z8

Z8 – II – 1

Rozložíme číslo 1978 = 2 . 23 . 43 a hledáme rozklady na součin dvou dvojciferných čísel. Získáme činitele 23 a 86 nebo 46 a 43. Po záměně 32 . 68 = 2176, 64 . 34 = 2176. Tedy řešením jsou čísla **32 a 68 nebo 64 a 34.**

Hodnocení:
nalezení rozkladu *2 body*
nalezení 1. řešení *2 body*
nalezení 2. řešení *2 body*

Z8 – II – 2



Označme *S* obsah trojúhelníku *ABC.*

Pak $S_{\Delta ASC} = S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}S$.

Trojúhelníky *SPC, BPC, SZC* jsou shodné podle věty *usu.*

$S_{\Delta SPC} = S_{\Delta BPC} = S_{\Delta SZC} = \frac{1}{4}S$.

Z toho plyne, že $S_{\Delta ASZ} = \frac{1}{4}S$.

Obsah trojúhelníku *ASZ* je 9 cm^2, proto *S* = 4.9 = **36 cm^2**.

Poznámka: Z uvedeného rovněž plyne, že trojúhelník *ABC* je pravoúhlý a *g = 30°.*

Hodnocení*:*
objevení shodnosti trojúhelníků *2 body*
nalezení vztahu mezi obsahy trojúhelníků *2 body*
určení obsahu trojúhelníku ABC *2 body*

Z8 – II – 3

Úsudkem: Rychlost Pepíka je dvakrát větší než rychlost pohyblivých schodů. Tedy, poběží-li po pohyblivých schodech, dostane se nahoru za třikrát kratší dobu, tj. za 12 : 3 = 4 s.

Rovnicí: Označme dráhu *s*. Rychlost schodů je $\frac{s}{12}$ a rychlost Pepíka $\frac{s}{6}$. Běží-li Pepík po pohyblivých schodech, je jeho rychlost $\frac{s}{6} + \frac{s}{12} = \frac{s}{4}$. Tedy dráhu *s* urazí **za 4 sekundy**.

Hodnocení*:*
úvaha *4 body*
správné řešení *2 body*

kategorie Z9

Z9 II 1

Rozdíl každých dvou za sebou zapsaných čísel v zadané posloupnosti je roven 1. Pokud bychom tyto rozdíly po dvou od sebe odečítali, dostali bychom výsledek 0. Výsledkem však musí kladné číslo, proto jednu dvojici rozdílů sečteme.
Např. (2000 1999) + (1998 1997) ++ (4 3) (2 1) = 1 + 1 ++ 1 1 = 2
2000 1999 + 1998 1997 + 1996 1995 1994 + 1993 ++ 8 7 6 + 5 + 4 3 2 + 1 = 2
Úloha má více řešení.

Hodnocení*:*
nalezení nejmenšího výsledku 2 body
správné umístění znamének 2 body
nalezení dalšího řešení 2 body

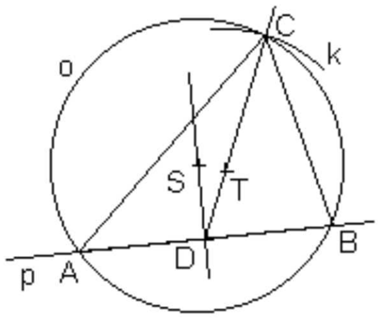
Z9 II 2

Rozbor: Těžnice trojúhelníku spojuje vrchol a střed protější strany a prochází těžištěm, proto bod *C* leží na polopřímce *DT*. Těžiště dělí těžnici v poměru 1 : 2, proto vzdálenost bodu *C* od bodu *T* je $2|DT|$. Vrchol C sestrojíme jako průsečík polopřímky *DT* a kružnice $k(T, 2|DT|)$.
Přímka *SD* je osa strany *AB* a bod *D* je její střed, proto vrcholy *A, B* leží na přímce *p*, která je kolmá k přímce *SD* a prochází bodem *D.* Body *A, B* leží na kružnici *o* opsané trojúhelníku *ABC*, která má střed *S* a poloměr $|SC|$. Vrcholy *A*, *B* určíme jako průsečíky přímky *p* a kružnice $o\ (S, |SC|)$.

Postup konstrukce (může být zapsán i slovy):

1. $\alpha\ DT$
2. $k;\ k(T; 2|DT|)$
3. $C;\ C \in \alpha\ DT \cap k$
4. $\leftrightarrow p;\ D \in p,\ p \perp SD$
5. $o;\ o(S; |SC|)$
6. $A, B;\ p \cap o = \{A, B\}$
7. ΔABC

Konstrukce:



Úloha má ve zvolené polorovině jedno řešení.

Hodnocení:
rozbor úlohy s náčrtkem 3 body
postup konstrukce 1 bod
konstrukce 2 body

Z9 II 3

a. Číslo *zao*100(*x*) může být rovno 0 nebo 100. *zao*100(*x) = 0* platí pro *x* = 0. Případ *zao*100(*x) = 100* nastane tehdy, když *x* = *zao*10*(x),* tedy pro *x* = 50. Úloha má dvě řešení: 0 a 50.
b. Hledané číslo *x* musí končit číslicí 4 a součet *x* + *zao10(x*) dvojčíslím 64, proto číslo *x* končí dvojčíslím 34 nebo 84. Dále musí platit *zao*1000(*x)* = 1000, tzn. $x \geq 500.$ Z toho plyne *x* + *zao10(x)* + *zao100(x) = 2764 1000 = 1764,* tzn. *x* < 600. Řešením je číslo 584

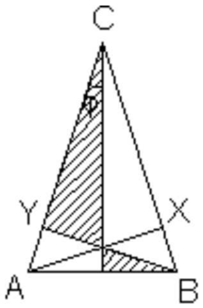
(584 + 580 + 600 + 1000 = 2764).

Hodnocení:
nalezení obou řešení v části a) 2 body
sestavení podmínek pro číslo x 3 body
určení čísla x 1 bod

Z9 II 4

Polopřímky *AX a BY* se protínají v průsečíku výšek uvnitř trojúhelníku *ABC,* proto trojúhelník *ABC* musí být ostroúhlý. Při vyjadřování velikostí vnitřních úhlů vycházíme z podobnosti trojúhelníků (věta uu), na něž je trojúhelník *ABC* rozdělen jeho výškami (viz obr.).

1. případ

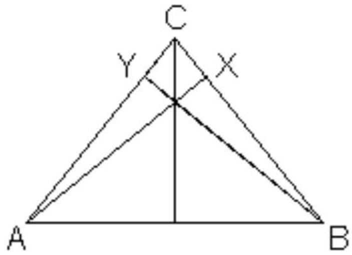


$\alpha = \beta = 4\varphi,\ \gamma = 2\varphi$

$\alpha + \beta + \gamma = 10\varphi = 180°$

$\varphi = 18°,\ \alpha = \beta = 72°,\ \gamma = 36°$

2. případ

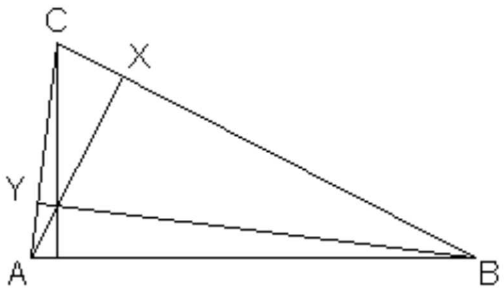


$\alpha = \beta = \frac{4}{3}\varphi,\ \gamma = 2\varphi$

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{14}{3}\varphi = 180°$

$\varphi = \frac{270°}{7},\ \alpha = \beta = \frac{360°}{7},\ \gamma = \frac{540°}{7}$

3. případ

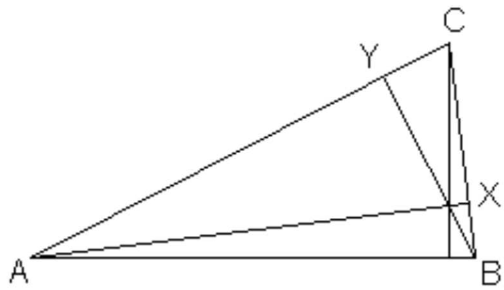


$\alpha = 12\varphi,\ \beta = 4\varphi,\ \gamma = 10\varphi$

$\alpha + \beta + \gamma = 26\varphi = 180°$

$\varphi = \frac{90°}{13},\ \alpha = \frac{1080°}{13},\ \beta = \frac{360°}{13},\ \gamma = \frac{900°}{13}$

4. případ



$\alpha = 4\varphi,\ \beta = 12\varphi,\ \gamma = 10\varphi$

$\alpha + \beta + \gamma = 26\varphi = 180°$

$\varphi = \frac{90°}{13},\ \alpha = \frac{360°}{13},\ \beta = \frac{1080°}{13},\ \gamma = \frac{900°}{13}$

Hodnocení:
objevení podobnosti trojúhelníků 2 body
výpočet velikostí úhlů v 1. a 2. případě 2 body
výpočet velikostí úhlů v 3. a 4. případě 2 body