# Matematická olympiáda - 49. ročník (1999-2000)

# Komentáře k úlohám III. kola pro kategorii Z9

## Z9 – III – 1

Větší číslo označme (10*a* + *b*), *a* > *b*, menší (10*b* + *a*), kde *a*, *b* jsou číslice různé od 0 (neodpovídalo by zadání úlohy).
Má platit (10*a* + *b*) – (10*b* + *a*) = 3/4 (10*b* + *a*).
Odtud dostáváme *a* = 2*b*.
Je-li *b* = 1, dostaneme čísla **21 a 12.**
Je-li *b* = 2, dostaneme čísla **42** a **24**.
Je-li *b* = 3, dostaneme čísla **63** a **36**.
Je-li *b* = 4, dostaneme čísla **84** a **48**.

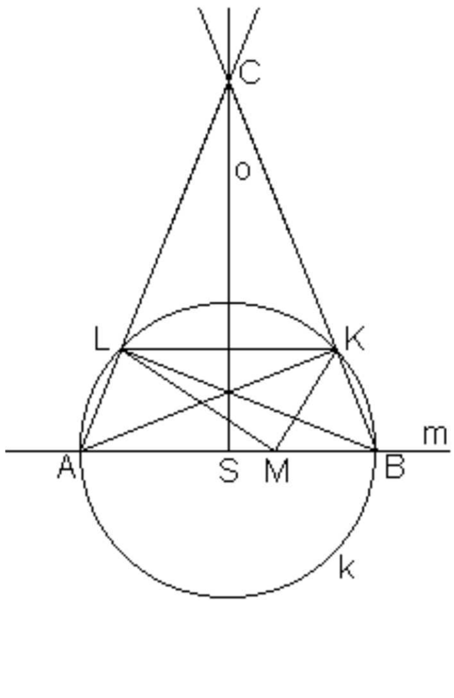
Petr si tedy myslel některou z uvedených dvojic čísel.

*Hodnocení:* nalezení jednoho řešení 2 body
nalezení dalších řešení po 1 bodu
odhalení nenulovosti číslic 1 bod

## Z9 – III – 2

1. Trojúhelník $ABC$ je rovnoramenný, proto osa *o* úsečky *KL* je zároveň jeho osou souměrnosti, $AB \perp o$. Sestrojíme osu *o* úsečky *KL.* Bodem *M* vedeme přímku *m*, která je rovnoběžná s *KL.* $m \cap o = S$; *S* je střed strany *AB.*
2. Body *K, L* jsou paty výšek trojúhelníku *ABC* na jeho ramena, proto úhly *AKB* a *ALB* jsou pravé a body *K, L, A, B* leží na Thaletově kružnici *k(S, |KS|);*

   $m \cap k = A,B$.
3. $AL \cap o = BK \cap o = C$.




*Hodnocení:* 1. část rozboru 2 body
2. část rozboru 2 body
3. část rozboru 1 bod
konstrukce 1 bod

## Z9 – III – 3

Trojciferné číslo *x* zaokrouhlené na stovky označme [*x*]. Číslo [*x*] může být některé z čísel 100, 200, 300, …, 1000. Nejdříve vynásobíme tato čísla číslem 9, potom odečteme 240 a výsledek vydělíme číslem 8 (plyne z $x = \frac{9.[x] - 240}{8}$).
Řešením jsou ta z nich, která jsou trojciferná a která lze zaokrouhlit na číslo [*x*].

| [$x$] | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9.[$x$] | 900 | 1800 | 2700 | 3600 | 4500 | 5400 | 6300 | 7200 | 8100 | 9000 |
| 9.[$x$] – 240 | 660 | 1560 | 2460 | 3360 | 4260 | 5160 | 6060 | 6960 | 7860 | 8760 |
| (9.[$x$] – 240) : 8 | 82,5 | **195** | 307,5 | **420** | 532,5 | **645** | 757,5 | 870 | *982,5* | *1095* |

Úloha má tedy tři řešení: **195, 420, 645.**

*Hodnocení:* za každé řešení 2 body

## Z9 – III – 4

1. Označme čísla na stěnách jednoho čtyřstěnu $a, b, c, x,$ druhého $4, 44, d, x$ (čtyřstěny jsou slepeny stěnou označenou číslem $x$). Má platit $4.44.a.b = 4.a.c.d = 44.b.c.d = a.b.c = 4.44.d.$

   Odtud dostaneme $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{44}, c = 4.44 = 176, d = \frac{1}{4.44} = \frac{1}{176}$.
   (Triviální řešení $a = b = c = d = 0$ nesplňuje podmínky úlohy.)

2. Označme čísla na stěnách jednoho čtyřstěnu $a, b, 4, x,$ druhého $c, d, 44, x$ (čtyřstěny jsou slepeny stěnou označenou číslem $x$).

a. V případě, že stěny označené čísly 4, 44 mají společný jeden vrchol, má platit

   $4.a.b = 44.c.d = 44.a.b.c = 4.b.c.d = 4.44.a.d.$

   Soustava rovnic má kromě triviálního řešení $a = b = c = d = 0$ ještě řešení $a = \frac{1}{44}, b = 11, c = \frac{1}{11}, d = \frac{1}{4}$

   .

b. V případě, že stěny označené čísly 4, 44 mají společnou jednu hranu, má platit

   $4.a.b = 44.c.d = a.b.c.d = 4.44.a.c = 4.44.b.d.$
   Soustava rovnic má pouze triviální řešení $a = b = c = d = 0$. Úloha nemá v tomto případě řešení, neboť není splněna zadaná podmínka.

*Hodnocení:* nalezení všech tří možností 1 bod
nalezení řešení v 1. případě 2 body
nalezení řešení ve 2. případě 2 body
neexistence řešení ve 3. případě 1 bod