KOMENTÁŘE K ÚLOHÁM I. KOLA

50. ročníku MO kategorií Z

(školní rok 2000/2001)

KATEGORIE Z9

Z9 – I – 1

Nahraďme ve čtyřciferném čísle s různými ciframi každou jeho číslici aritmetickým průměrem zbývajících číslic. Které nejmenší a které největší číslo můžeme takto vytvořit?

Černek

Řešení:

Nejprve zjistíme, z kterých číslic může být čtyřciferné číslo složeno. Aby aritmetickým průměrem libovolných tří číslic v čtyřciferném čísle bylo jednociferné číslo (číslice), musí všechny číslice dávat při dělení třemi stejný zbytek. Zbytek 0 při dělení třemi dávají číslice 0, 3, 6, 9; zbytek 1 dávají číslice 1, 4, 7 a zbytek 2 dávají číslice 2, 5, 8. Protože čtyřciferné číslo se má skládat z různých číslic, můžeme použít pouze číslice 0, 3, 6, 9.

Co nejmenší číslo můžeme vytvořit daným postupem z co největšího čísla (tj. 9630) a co největší číslo můžeme vytvořit z co nejmenšího čísla (tj. 3069).

Nejmenším číslem tedy je 3456 a největším číslem je 5643.

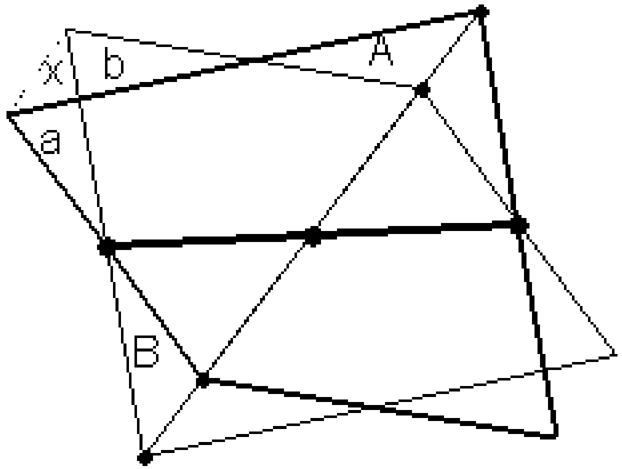
Z9 – I – 2

Úhlopříčka konvexního čtyřúhelníka půlí úsečku spojující středy dvou protilehlých stran tohoto čtyřúhelníka. Dokažte, že tato úhlopříčka dělí čtyřúhelník na dvě stejně velké části.

Bednářová

Řešení:

Daný čtyřúhelník zobrazíme ve středové souměrnosti se středem v průsečíku úsečky spojující středy dvou protilehlých stran a úhlopříčky (obrázek 1). Potom stačí dokázat, že A + a = B + b. Podle věty *sus* jsou shodné trojúhelníky B = a + x, ale také A = b + x. Odtud B – a = A – b, tedy A + a = B + b, což jsme měli dokázat.



obrázek 1

Úhlopříčka dělí čtyřúhelník na dvě stejné části.

Z9 – I – 3

Řešte soustavu rovnic (v obou rovnicích je *x* a *y* stejné číslo):

$$x + y_{10} = 98{,}7$$

$$x_{10} - y = 23{,}4$$

x_{10} je číslo x zaokrouhlené na desítky, y_{10} je číslo *y* zaokrouhlené na desítky.

Bednářová

Řešení:

Označme číslo $x = 10a + b$, číslo $y = 10c + d$. Z první rovnice vyplývá, že $b = 8{,}7$ a z druhé rovnice, že $d = 6{,}6$. Odtud dostáváme, že $x_{10} = 10(a + 1)$ a $y_{10} = 10(c + 1)$ (obě čísla zaokrouhlujeme nahoru).

Potom řešíme soustavu rovnic:

$$10a + 8{,}7 + 10(c + 1) = 98{,}7$$
$$10(a + 1) - (10c + 6{,}6) = 23{,}4$$

Řešením soustavy rovnic je $a = 5$, $c = 3$.

Hledaná čísla jsou $x = 58{,}7$ a $y = 36{,}6$.

Z9 – I – 4

Tři přátelé si byli zaplavat v jezeře, které má tvar kruhu. Všichni začali plavat ze stejného místa u břehu. Julča plavala přímo na jih, Věrka na východ a Standa rovnou přes střed jezera. Všichni doplavali ke břehu ve stejnou chvíli a zjistili, že kdyby se měli setkat u Věrky, ušli by po břehu o čtvrtinu delší trasu než kdyby se setkali u Julči. Kdo z nich plaval nejpomaleji? Které místo je pro jejich setkání nejvýhodnější (nejméně se nachodí)? Narýsuj trajektorie jejich pohybu.

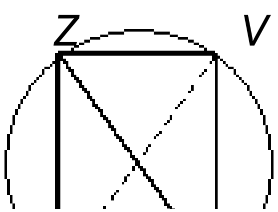
Bednářová

Řešení:

Trajektorie pohybu přátel, plavajících v jezeře, odpovídají v případě dívek sousedním stranám obdélníku vepsaného kružnici, v případě Standy úhlopříčce tohoto obdélníku. Označme místa doplavání jednotlivých dětí podle počátečních písmen, tedy J, S, V a výchozí bod Z (obrázek 2). Dráha, kterou by ušla Julča k Věrce, je stejně dlouhá jako ta, kterou ušla Věrka k Julče (je rovna polovině obvodu jezera). Dráha, kterou by ušel Standa k Julče je kratší než ta, kterou by ušel k Věrce (délka oblouku *SJ* je kratší než délka oblouku *SV*). Úsečka *ZV* je tedy kratší než *ZJ*, proto **nejpomaleji plavala Věrka.**

Nejvýhodnější místo setkání je u Standy, neboť dráha, kterou ujdou dohromady Julča s Věrkou je ze všech nejkratší.

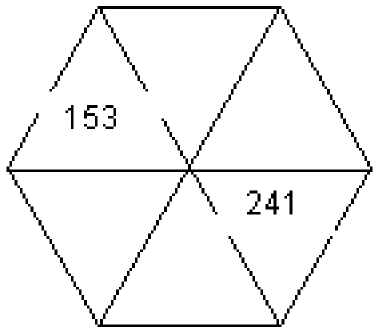
Podle zadání platí $SV + JV = \frac{5}{4}(VJ + SJ)$, kde $JV = VJ$ a $JV = SJ + SV$. Odtud dostáváme $SV = 2SJ$. Odtud vyplývá, že poměr úhlů, které svírají úhlopříčky *ZS* a *JV*, je 1 : 2. **Úhly, které svírají úhlopříčky, jsou 60^0 a 120^0.**



obrázek 2

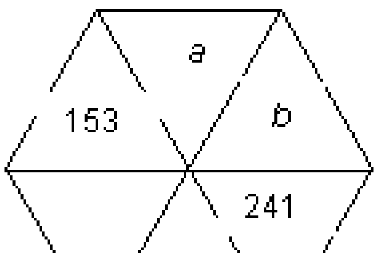
Z9 – I – 5

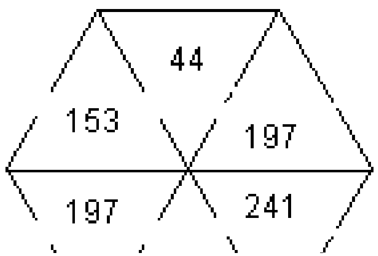
Doplňte do jednotlivých trojúhelníků na obrázku celá čísla tak, aby se v každém lichoběžníku tvořeném třemi trojúhelníky součet některých dvou čísel rovnal třetímu.

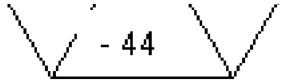


Bednářová

Řešení:



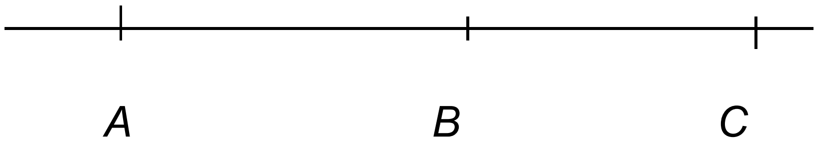




obrázek 3 **obrázek 4**

Z9 – I – 6

Monika si na číselné ose zvolila číslo. Potom na ní vyznačila ještě dvě čísla: pětinásobek zvoleného čísla a číslo o pět větší než zvolené číslo. Dostala tak body *A*, *B* a *C*, pro jejichž vzdálenosti platí: $|AB| = 8\,cm$ a $|BC| = 6\,cm$.



Zjistěte, které číslo si Monika mohla zvolit?

Černek

Řešení:

Označme *a* číslo, které si Monika zvolila. Číslo *a* může být umístěno na ose v bodě *A* nebo *B*.
Uvažujme tři případy:

a) $0 < a < 1{,}25$, potom $A = a$, $B = 5a$, $C = a + 5$. Vzdálenost mezi body *A* a *B* je $4a$, což je 8 cm, odtud *a* je od počátku vzdáleno 2 cm. Vzdálenost mezi body *A* a *C* je 5 jednotek, což je 14 cm, odtud 1 cm odpovídá $\frac{5}{14}$. Z toho vyplývá, **že Monika si zvolila číslo a = 2 . $\frac{5}{14} = \frac{5}{7}$.**

b) $a > 1{,}25$, potom $A = a$, $B = a + 5$, $C = 5a$. Vzdálenost mezi body *A* a *C* je $4a$, což je 14 cm, odtud *a* je od počátku vzdáleno 3,5 cm. Vzdálenost mezi body *A* a *B* je 5 jednotek, což je 8 cm, odtud 1 cm odpovídá $\frac{5}{8}$. Z toho vyplývá,

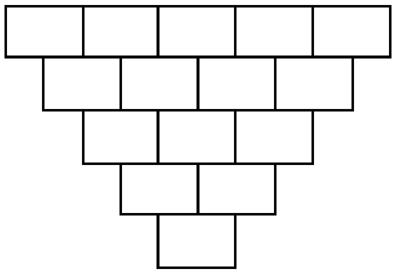
že Monika si zvolila číslo a = 3,5 . $\frac{5}{8}$ = $\frac{35}{16}$.

c) $a < 0$, potom $A = 5a$, $B = a$, $C = a + 5$. Vzdálenost mezi body A a B je $4a$, což je 8 cm, odtud a je od počátku vzdáleno 2 cm. Vzdálenost mezi body A a C je 5 jednotek, což je 6 cm, odtud 1 cm odpovídá $\frac{5}{6}$. Z toho vyplývá, že **Monika si zvolila číslo a = 2 . $\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{3}$.**

KATEGORIE Z8

Z8 – I – 1

Míša doplnil do horního řádku sčítacího trojúhelníku, který je na obrázku, pět různých prvočísel. Jejich součet byl 50. Které největší číslo mu mohlo vyjít v dolním políčku?



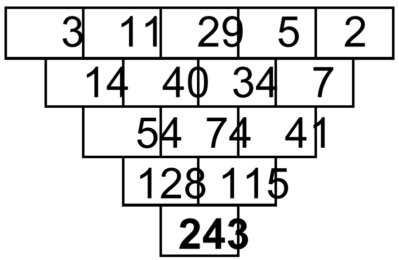
Černek

Řešení:

Z prvočísel menších než 50 (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 a 47) vybereme čísla, jejichž součet s dalšími čtyřmi prvočísly nemůže být 50. Jsou to čísla 37, 41, 43 a 47, protože po přičtení nejmenších možných čtyř prvočísel dostaneme výsledek větší než 50, a číslo 31, protože po přičtení nejmenšího možného součtu je výsledek menší a při přičtení druhého nejnižšího součtu už je výsledek vyšší než 50.
Ze zbývajících čísel lze sestavit pět pětic, které vyhovují zadání:

(1) 29+11+5+3+2
(2) 23+17+5+3+2
(3) 23+13+7+5+2
(4) 19+13+11+5+2
(5) 17+13+11+7+2

Při dosazování do trojúhelníku se čísla v krajních políčkách započítají do konečného součtu 1x, vedlejší čísla 4x a číslo z prostředního políčka 6x. To znamená, že má-li být výsledek co největší číslo, musí být nejvyšší číslo umístěno uprostřed, dvě nižší vedle něj a dvě nejnižší čísla v krajních políčkách.
Nejvyšší součet získáme po dosazení čísel 29, 11, 5, 3, 2 (obrázek 5).



obrázek 5

Největší číslo, které mohlo Míšovi vyjít v dolním políčku je 243.

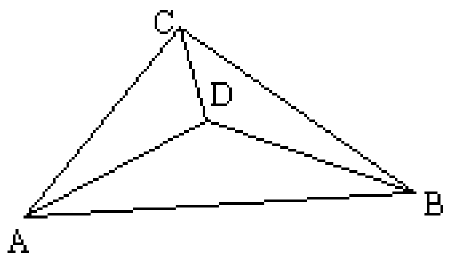
Z8 – I – 2

Body A, B, C, D jsou vrcholy třech různých čtyřúhelníků, které mají obsahy 9, 10 a 13 cm^2. Určete obsah sjednocení těchto čtyřúhelníků? Narýsujte jednu takovou čtveřici bodů.

Černek

Řešení:

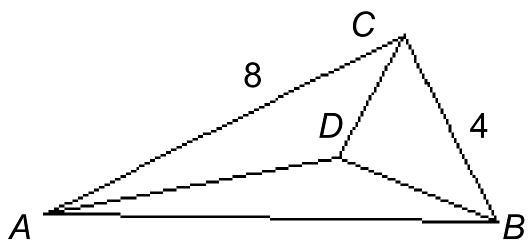
Body *A*, *B*, *C*, *D* ani žádné tři z nich nemohou ležet v jedné přímce, protože by netvořily čtyřúhelník. Zároveň jeden z nich musí ležet v trojúhelníku tvořeném ostatními body, protože jinak by body *A*, *B*, *C*, *D* tvořily právě jeden čtyřúhelník *ABCD*. Označme tento bod *D*. Tak získáme tři nekonvexní čtyřúhelníky *ABCD* s úhlem při vrcholu *D* větším než 180º (obrázek 6).



Obrázek 6

Sjednocením těchto tří čtyřúhelníků je trojúhelník ABC. Jeho obsah dostaneme jako polovinu součtu obsahů všech tří čtyřúhelníků: **S =** $\frac{9+10+13}{2}$ **= 16 cm^2**.

Obsah sjednocení čtyřúhelníků je 16 cm^2.



Obrázek 7

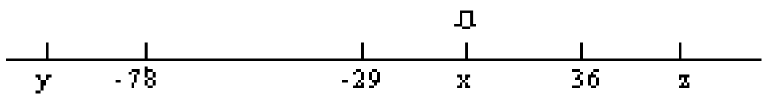
Z8 – I – 3

Blecha se zájmem o matematiku lezla po učebnici a našla v ní číselnou osu. Nejprve se po ní jenom slušně procházela, potom začala skákat tak, že přeskakované číslo bylo vždy ve středu jejího skoku. Nejprve přeskočila číslo –78. Z místa, kam dopadla, se odrazila a přeskočila číslo –29. Potom se znovu odrazila a přeskočila číslo 36. Překvapeně zjistila, že dopadla přesně na totéž číslo, ze kterého začala skákat. Které číslo to bylo?

Bednářová

Řešení:

Aby se blecha mohla nakonec dostat na místo, ze kterého začala skákat, musela z místa *x* mezi čísly –29 a 36 skočit na číslo *y* před číslo –78, odsud na číslo *z* za číslo 36 a zpět na *x*, mezi čísla –29 a 36 (obrázek 8).



Obrázek 8

Protože blecha dané číslo přeskakovala vždy tak, že bylo uprostřed jejího skoku, bylo dané číslo aritmetickým průměrem obou krajních čísel. Dostáváme tedy tři rovnice s neznámými *x*, *y* a *z*.

$$\frac{x+y}{2} = -78$$

$$\frac{y+z}{2} = -29$$

$$\frac{z+x}{2} = 36$$

Řešením této soustavy je uspořádaná trojice $x = -13$, $y = -143$, $z = 85$.

Úlohu lze řešit i takto: označme číslo, ze kterého blecha skáká b, a číslo, které přeskakuje p. Potom číslo, na které doskočí je $-b + 2p$.
Po prvním skoku byla blecha na čísle $-b + 2 \cdot (-78)$.
Po druhém skoku byla blecha na čísle $-[-b + 2 \cdot (-78)] + 2 \cdot (-29)$
Po třetím skoku byla blecha na čísle $-\{-[-b + 2 \cdot (-78)] + 2 \cdot (-29)\} + 2 \cdot 36$ a zároveň na čísle b. Odtud dostáváme rovnici
$-\{-[-b + 2 \cdot (-78)] + 2 \cdot (-29)\} + 2 \cdot 36 = b$, jejímž řešením je $b = -13$.
Blecha začala skákat na čísle –13.

Z8 – I – 4
Jana našla v knize zajímavou posloupnost přirozených čísel. Všimla si, že součet tří po sobě jdoucích čísel této posloupnosti je vždy buď 20 nebo 22. Tyto výsledky se pravidelně střídají: 20, 20, 22, 22, 20, 20, 22, … Na prvním místě posloupnosti bylo číslo 9, na devátém číslo 7. Určete součet prvních 100 členů posloupnosti.

Krállová

Řešení:
Jestliže mezi prvními 100 členy posloupnosti vynecháme první číslo (víme, že je to číslo 9), můžeme zbývajících 99 členů rozdělit do 33 skupin po třech. Součty těchto trojic se budou pravidelně střídat: 20, 20, 22, 22, 20, 20, 22, ... protože to budou součty 2., 5., 8., 11., ... trojice po sobě jdoucích čísel. Pro součet prvních 100 členů této posloupnosti tedy dostáváme vztah
$S = 9 + 20 + 20 + 22 + 22 + 20 + ... + 22 + 20 = 701$.
Součet prvních 100 členů posloupnosti je 701.

Z8 – I – 5
Blecha se dostala na čtvercovou síť se čtverečky 1 cm x 1 cm. Rozhodla se, že bude skákat jen po uzlových bodech této sítě. Protože její šťastné číslo je 13, udělá vždy skok dlouhý jen 13 cm. Může se takto dostat do libovolného uzlového bodu?

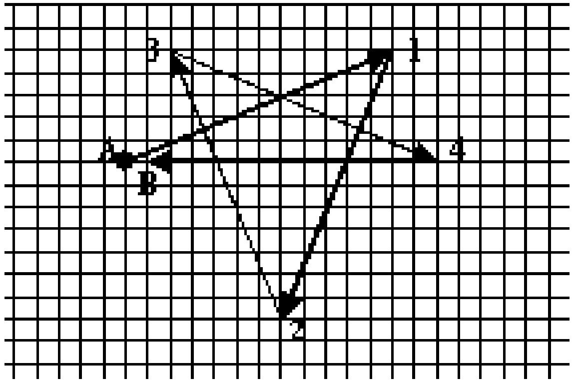
Černek

Řešení:
Blecha může skákat buď ve směru mřížových čar, nebo se může přesouvat do protějšího vrcholu obdélníku s rozměry

5 a 12 (podle Pythagorovy věty).

Blecha se může dostat do libovolného uzlového bodu, jestliže se může dostat do sousedního uzlového bodu. Do libovolného dalšího bodu se potom sledem skoků.

Do sousedního uzlového bodu se může dostat například takto.



Blecha se může dostat do libovolného uzlového bodu.

Z8 – I – 6

Tibor měl sečíst dvě desetinná čísla větší než 1. Nevšiml si však ani jedné desetinné čárky a sečetl je jako celá čísla. Dostal tak výsledek 1476. Správný součet však měl být 60,7* (číslici na místě setin jsme si nezapamatovali). Která čísla měl Tibor sečíst?

Černek

Řešení:

Výsledek Tiborova sčítání mohl vyjít 1476 v případě, že jedno z čísel má čtyři cifry a druhé dvě nebo tři cifry, nebo mají obě čísla tři cifry. Tiborův součet se neliší od správného “jen” desetinnou čárkou v případě, že sčítance měly různý počet desetinných míst. Protože správný součet je větší než 60, musí být buď obě čísla řádu desítek, nebo jedno řádu desítek a jedno řádu jednotek. Z těchto podmínek vyplývá, že přicházejí v úvahu následující tři varianty:

a) $A_1 A_2 , A_3$ b) A_1, A_2 c) $A_1 A_2 , A_3$

$\underline{B_1 B_2 , B_3 B_4}$ $\underline{B_1 B_2 , B_3 B_4}$ $\underline{\quad B_1 , B_2 B_3}$

ad a) Dostáváme dvě rovnosti: A_1A_2,A_3 a $A_1A_2A_3$

$\underline{B_1B_2,B_3B_4}$ $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ $\underline{B_1B_2B_3B_4}$

6 0 , 7 * 1 4 7 6

Po dosazení B_1=1 dojdeme postupným doplňováním číslic k závěru, že tato varianta nemá řešení.
ad b) Obdobně jako v případě a). Tato varianta také nemá řešení.
ad c) V tomto případě dojdeme postupným doplňováním čísel k výsledku 51,1 + 9,65 = 60,75.
Tibor měl sečíst čísla 51,1 a 9,65.

KATEGORIE Z7

Z7 – I – 1

Lenka našla v knížce zajímavou posloupnost přirozených čísel. Každé číslo je ciferným součtem součinu předcházejících dvou čísel. Prozradila nám, že na prvním místě této posloupnosti je číslo 8, na třetím je jednociferné číslo a na čtvrtém číslo 2. Které číslo může být na šestém místě této posloupnosti?

Volfová, Krállová

Řešení:
Sestavíme tabulku:

pořadí čísel	1	2	3	4	5	6
číslo posloupnosti	8	*a*	*b*	2		*x*
součin s předcházejícím čl. posl.		*c*	*d*			
ciferný součet součinu		*e*	2			

Ciferný součet součinu musí být roven následujícímu členu posloupnosti, tedy *e* = *b*.

Jestliže ve třetím sloupci máme ciferný součet 2, potom mohou nastat tři možnosti (v ostatních případech by *b* nemohlo být jednociferné):

a) *d* = 11. Potom *a* = 11, *b* = 1. Odtud *c* = 88, *e* = 16. Ovšem *e* ¹ *b*, proto *a* = 11, *b* = 1 není řešením.

b) *d* = 2. Potom *a* = 1, *b* = 2 nebo *a* = 2, *b* = 1. V obou případech se dostáváme ke sporu *e* ¹ *b* (v prvním *e* = 8, v druhém *e* = 7), proto ani jedna z možností není řešením.

c) *d* = 20. Potom *a* = 5, *b* = 4 nebo *a* = 4, *b* = 5. Rovnost *e* = *b* je splněna v obou případech.

Doplníme tabulku pro případ *a* = 5, *b* = 4:

pořadí	1	2	3	4	5	6
číslo	8	5	4	2	8	7
součin s předcházejícím čl. posl.		40	20	8	16	
ciferný součet součinu		4	2	8	7	

Doplníme tabulku pro případ *a* = 4, *b* = 5:

pořadí	1	2	3	4	5	6
číslo	8	4	5	2	1	2
součin s předcházejícím čl. posl.		32	20	10	2	
ciferný součet součinu		5	2	1	2	

Na šestém místě posloupnosti může být číslo 2 nebo 7.

Z7 – I – 2

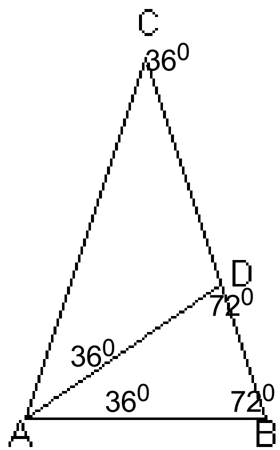
Trojúhelník *ABC* je rovnoramenný. Jeho ramena *AC* a *BC* svírají úhel o velikosti 36^0. Osa úhlu *CAB* protíná stranu *BC* v bodě *D*. Úsečka *AD* měří 8 cm. Kolik měří strana *AB*?

Krejčová

Řešení:

Je-li trojúhelník *ABC* rovnoramenný a *ACB* = 36^0, potom *BAC* = *ABC* = 72^0. Přímka *AD* je osa úhlu *CAB*, proto úhly*CAD* a *BAD* mají velikosti 36^0. Z toho vyplývá trojúhelník *ACD* je rovnoramenný trojúhelník s rameny *AD* a *CD*, dlouhými 8 cm. Rovněž trojúhelník *ABD* je rovnoramenný s rameny *AB* a *AD*, dlouhými rovněž 8 cm (obrázek 9).

Úsečka AB je tedy rovna 8cm.



Obrázek 9

Z7 – I – 3

V cukrárně prodávají 2 dl pomerančového džusu po 12 Kč a 2 dl jablečného džusu po 8 Kč. Kromě toho na požádání připraví i míchaný pomerančovo-jablečný džus, ve kterém jsou pomerančová i jablečná složka zastoupeny v takovém poměru, aby ceny obou složek byly stejné. Kolik stojí 2dl takového džusu? (Za přípravu míchaného džusu si nic neúčtují)

Bednářová

Řešení:

Úlohu budeme řešit pomocí dělitelnosti. Nejprve zjistíme, jaké množství (kolik dílů) jednotlivých složek je v míchaném nápoji, aby byly ceny obou složek stejné.

8 . ( ) = 12 . ( )

2 . 2 . 2 . ( ) = 2 . 2 . 3 . ( )

Do závorek doplníme čísla tak, aby se obě strany rovnaly.

2 . 2 . 2 . (3) = 2 . 2 . 3 . (2)

Ve sklenici jsou tedy 3 díly jablečného a 2 díly pomerančového džusu (jeden díl je $\frac{1}{5}$ sklenice).

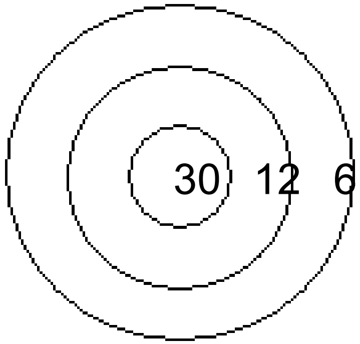
Cena jablečného džusu je $\frac{3}{5}$. 8 Kč = 4,80 Kč a cena pomerančového džusu je $\frac{2}{5}$. 12 Kč = 4,80 Kč. **2 dl**

míchaného nápoje stojí 9,60 Kč.

Poznámka: Úlohu lze řešit také např. pomocí nepřímé úměrnosti nebo soustavou dvou rovnic o dvou neznámých.

Z7 – I – 4

Vilík Tell střílel na terč (viz obr.). Nevystřelil víc než dvacetkrát. Každým šípem terč zasáhl, průměrně získal 17 bodů na jeden zásah. Kolik nejvíce bodů mohl získat?



Hozová

Řešení:

Všechna čísla na terči jsou dělitelná šesti, proto musí být i součet Vilíkových zásahů dělitelný šesti. Dále také víme, že získal průměrně 17 bodů, a proto musí být součet Vilíkových zásahů také dělitelný 17. Násobky čísel 6 a 17 jsou čísla 102, 204, 306, 408, 510, … (násobky nejmenšího společného násobku). Postupně zjišťujeme, na kolik zásahů mohl jednotlivé součty získat. 102 bodů mohl získat šesti zásahy, 204 bodů 12 zásahy, 306 bodů 18 zásahy, 408 bodů 24 zásahy. Protože nevystřelil více než dvacetkrát, **mohl získat nejvýše 306 bodů 18 zásahy.**

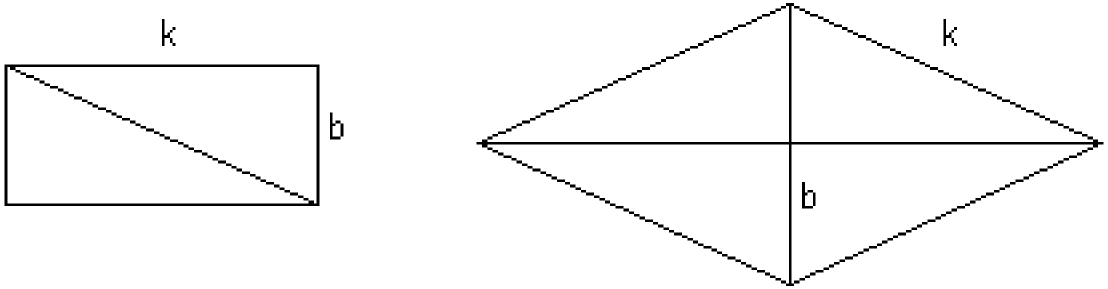
Z7 – I – 5

Jedna ze stran obdélníku *ABCD* je dvakrát kratší než jedna z úhlopříček kosočtverce *KLMN*. Jedna ze stran kosočtverce *KLMN* je stejně dlouhá jako jedna z úhlopříček obdélníku *ABCD*. Kosočtverec *KLMN* má obsah

36 cm^2. Jak velký obsah má obdélník *ABCD*?

Bednářová

Řešení:



Z7 – I – 6

Starý pirát zanechal mapu ostrova s popisem cesty k pokladu:

„Z místa označeného křížkem se vydej polovinou celkového počtu kroků na východ. Nyní udělej 12 kroků na sever. Potom se vydej opět na východ. Udělej třetinu počtu kroků, které ti chybějí k pokladu. Vydej se na severovýchod a ujdi polovinu zbývajícího počtu kroků. Nyní ti zbývá jen ujít 189 kroků na sever a 57 kroků na severozápad. Tam leží poklad.“

Kolik kroků je třeba ujít celkem?

Krállová

Řešení:

Popis cesty zapíšeme do tabulky a úlohu řešíme od konce.

směr	počet kroků	výpočet zbývajících kroků	zdůvodnění
V	polovina celk. počtu	1500 = 750 . 2	Ujde-li polovinu, bude mu zbývat stejné množství jako ušel (750)

S	12 kroků	750 = 738 + 12	
V	třetina zbytku	$738 = \frac{2}{3} \cdot 492$	Ujde-li třetinu, budou mu zbývat dvě třetiny cesty (492).
SV	polovina zbytku	492 = 246 . 2	Ujde-li polovinu, bude mu zbývat stejné množství jako ušel (246)
S	189 kroků	246 = 189 + 57	
SZ	57 kroků	57	

Pirát musí ujít celkem 1500 kroků.

KATEGORIE Z6

Z6 – I – 1

Pěticiferné číslo má tyto vlastnosti:

- Druhá číslice je rovna součinu první číslice a první číslice.
- Čtvrtá číslice je rovna součinu druhé a třetí číslice.
- Pátá číslice je rovna podílu druhé a čtvrté číslice.

Najdi všechna taková čísla.

Ptáčková

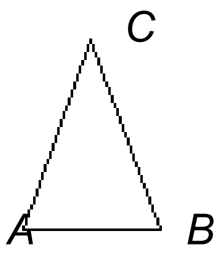
Řešení:

Aby byla druhá číslice rovna součinu první a první číslice, může být první číslice 1, 2 nebo 3, potom je druhá číslice 1, 4 nebo 9. Má-li být čtvrtá číslice rovna součinu druhé a třetí číslice a zároveň pátá číslice podílem druhé a čtvrté číslice, musí být druhá a čtvrtá číslice shodné a třetí a pátá číslice 1.

Hledaná pěticiferná čísla jsou 11111, 24141 a 39191.

Z6 – I – 2

Napiš návod, jak můžeš pouze pomocí kružítka ověřit, že trojúhelník na obrázku je rovnoramenný a že velikost úhlu *ACB* je 40^0.



Černek

Řešení:

Nejprve zjistíme zda jsou obě ramena stejně dlouhá (oblouk kružnice se středem v bodě *C* musí procházet body *A*, *B*. Velikost úhlu můžeme zjistit různými způsoby. Navrhneme zde dvě řešení:

1. Sečteme devětkrát úhel 40^0 (vynásobíme ho devíti) a získáme plný úhel 360^0.
2. Úhly při základně jsou podle věty o součtu úhlů v trojúhelníku a věty o velikostech úhlů v rovnoramenném trojúhelníku rovny 70^0. Rozdíl úhlů při základně a při hlavním vrcholu je 30^0, tj. je roven polovině velikosti vnitřního úhlu rovnostranného trojúhelníku.

Z6 – I – 3

Délky hran kvádru jsou vyjádřeny celými čísly v cm. Dvě z jeho stěn mají obsahy 147 cm^2 a 539 cm^2. Jak velký objem může mít tento kvádr?

Černek

Řešení:

Obsah stěny kvádru je roven součinu jejích stran, proto nejprve rozložíme čísla 147 a 539 na součin prvočísel. 147 = 7 . 7 . 3 a 539 = 7 . 7 . 11. Odtud dostáváme, že délka hrany, která je průnikem dvou sousedních stěn je 1 cm (zbývající hrany jsou 147 cm a 539 cm), 7 cm (zbývající hrany jsou 21 cm a 77 cm) nebo 49 cm (zbývající hrany jsou

3 cm a 11 cm). **Objem kvádru může být 1 . 147 . 539 = 79233 cm^3, 7 . 21 . 77 = 11319 cm^3 nebo 49 . 3 . 11 = 1617 cm^3.**

Z6 – I – 4

V 6.A byl v pololetí průměr známek z fyziky 1,7. Na konci roku se Matěj polepšil z 2 na 1, Ivanka z 3 na 2 a Lenka ze 4 na 2. Pavel se zhoršil z 3 na 4. Průměr známek celé třídy se tedy zlepšil o 0,1. Kolik nejvíce dětí v 6.A mohlo mít na konci roku jedničku z fyziky?

Bednářová

Řešení:

Celkově se součet všech známek z fyziky zlepšil o 3 a průměr známek o 0,1. Odtud je zřejmé, že ve třídě bylo 30 dětí (0,1n = 3) a součet známek na konci roku byl 30 . 1,6 = 48. Ze zadání víme, že alespoň 3 žáci neměli jedničku. Postupným snižováním počtu žáků a součtu jejich známek (nejvyšším možným stupněm), zjistíme, že **ve třídě 6. A mohlo mít nejvýše 23 dětí jedničku z fyziky.**

Z6 – I – 5

Vložíme-li mezi číslice dvojciferného čísla dvojčíslí 51, dostaneme číslo dělitelné sedmi. Vložíme-li mezi ně dvojčíslí 15, dostaneme číslo, které při dělení pěti dává zbytek 2. Najdi všechna taková dvojciferná čísla.

Černek

Řešení:

Má-li jakékoli číslo dávat při dělení pěti zbytek 2, musí mít na místě jednotek 2 nebo 7. Dělením zjistíme, že z čísel *512 a *517 jsou dělitelná 7 čísla 1512, 8512 a 6517. **Hledaná dvojciferná čísla tedy jsou 12, 92 a 67.**

Z6 – I – 6

Baron Prášil narýsoval několik mnohoúhelníků, které mají velikost všech vnitřních úhlů menší než 180^0. Tvrdil, že je mezi nimi i čtyřúhelník s třemi ostrými úhly, pětiúhelník a šestiúhelník se čtyřmi ostrými úhly. V kterých případech mluvil pravdu? Svou odpověď zdůvodni.

Bednářová

Řešení:

V čtyřúhelníku je součet velikostí všech vnitřních úhlů 360^0. Je-li součet velikostí tří jeho úhlů menší než $3 . 90 = 270^0$, potom velikost zbývajícího úhlu musí být větší než $360 – 270 = 90^0$. To je splněno i v případě, že velikost každého úhlu je menší než 180^0**. V případě čtyřúhelníku tedy mluvil pravdu.**

V pětiúhelníku je součet velikostí všech vnitřních úhlů 540^0. Je-li součet velikostí čtyř jeho úhlů menší než $4 . 90 = 360^0$, potom velikost zbývajícího úhlu musí být větší než $540 – 360 = 180^0$ a to je spor s tím, že každý úhel má být menší než 180^0. **V případě pětiúhelníku tedy nemluvil pravdu.**

V šestiúhelníku je součet velikostí všech vnitřních úhlů 720^0. Je-li součet velikostí čtyř jeho úhlů menší než $4 . 90 = 360^0$, potom velikost zbývajícího úhlu musí být větší než $720 – 360 = 360^0$ a to je spor s tím, že každý úhel má být menší než 180^0, protože by tady alespoň jeden úhel musel být větší než 180^0. **V případě šestiúhelníku tedy nemluvil pravdu**.

KATEGORIE Z5

Z5 – I – 1

Na Dračím ostrově žilo 103 modrých a 113 zelených draků. Zlý čaroděj ostrov zaklel: Když se setkají 3 draci jedné barvy s 5 draky druhé barvy, všech 8 draků zmizí. Je možné, aby na ostrově zůstali jenom modří draci? Kolik by jich pak bylo?

Černek

Řešení:

Označme počet setkání pěti zelených draků a tří modrých draků u, počet setkání pěti modrých draků a tří zelených draků v. Mají-li zmizet všichni zelení draci a zůstat pouze modří, potom musí platit $5u + 3v = 113$ (zmizí všichni zelení draci), a zároveň $3u + 5v < 103$ (někteří modří draci zůstanou), přičemž u musí být co největší.

Postupně řešíme Diofantovskou rovnici a kořeny dosazujeme do nerovnice.

a) Pro $u = 22$, $v = 1$ je $3u + 5v$ rovno 71.

b) Pro $u = 19$, $v = 6$ je $3u + 5v$ rovno 87.

c) Pro $u = 16$, $v = 11$ je $3u + 5v$ rovno 103, což by však na ostrově nezbyl žádný modrý drak.

Na ostrově zbude 103 – 71 = 32 nebo 103 – 87 = 16 modrých draků.

Poznámka: Žáci budou úlohu řešit úvahou a metodou pokus – omyl.

Z5 – I – 2

Mojmír sečetl dvě čísla a dostal výsledek 9163. Každá číslice prvního z čísel byla o 1 menší než druhého z nich (tj. kdyby například na místě stovek byla v prvním čísle číslice 4, v druhém čísle by na místě stovek byla číslice 5). Jaká čísla sčítal?

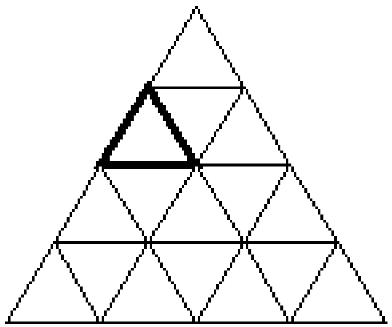
Bednářová

Řešení:

Označme první číslo p. Druhé číslo je o 1111 větší než první číslo, proto je rovno $p + 1111$. Součet čísel je $2p + 1111 = 9163$. Odtud dostáváme, že **první číslo je 4026 a druhé 5137.**

Z5 – I – 3

Ferda Mravenec procházel mraveništěm (viz obr.). Víme, že šel stále stejně rychle a že vyznačenou část prošel za 6 s. Za jak dlouho mohl projít všechny cestičky mraveniště? Nakresli také jeho cestu.



Bednářová

Řešení:
Obrazec, kterým je znázorněno mraveniště, lze nakreslit jedním tahem. Mravenec tedy při projití všemi cestičkami, projde každou cestičku právě jednou. Jestliže prošel vyznačenou část za 6 s, prošel celé mraveniště, které obsahuje 10 takových částí, za 60 s, tj. za 1 min.

Z5 – I – 4
Od té doby, co sedmihlavý drak začal jíst ovesné vločky, vzrostla jejich spotřeba v království na dvojnásobek. Dnes už drak sežral 36 kg vloček, což je celodenní spotřeba pro tři z jeho hlav. Jak velká je tedy denní spotřeba vloček v království?
Pozn.: Každá hlava sežere denně stejné množství vloček.

Bednářová

Řešení:
Jestliže tři drakovy hlavy spotřebují 36 kg vloček za den, spotřebuje jedna jeho hlava 36 : 3 = 12 kg vloček za den.

Drak, stejně jako lidé v království, spotřebuje denně 7 . 12 = 84 kg vloček. **Denní spotřeba vloček v království je tedy 2 . 84 = 168 kg.**

Z5 – I – 5

Matěj šel do obchodu a koupil 11 lízátek, 9 žvýkaček, 7 perníků, 3 nanuky a 1 čokoládu. Jeho účtenka vypadala takto:

18,50
23,10
12,00
32,90
13,50
100,00

Kolik stály jednotlivé sladkosti?

Ptáčková

Řešení:

Postupným dělením jednotlivých částek na účtence množstvím jednotlivých druhů sladkostí zjistíme, co kolik stálo (výsledek dělení musí vyjít při dělení na jedno desetinné místo beze zbytku). **Čokoláda stála 18,50 Kč, lízátko 2,10 Kč, nanuk 4 Kč, perník 4,70 Kč a žvýkačka 1,50 Kč.**

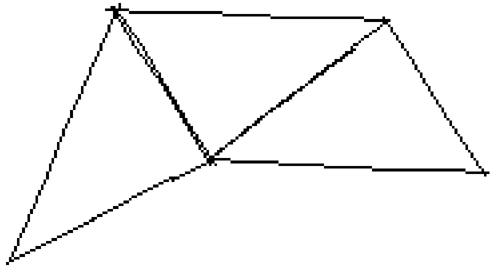
Z5 – I – 6

Jaký největší a jaký nejmenší obvod může mít pětiúhelník složený ze tří trojúhelníků o rozměrech 8 cm, 10 cm a 12 cm? Nakresli obrázek.

Bednářová

Řešení:

Pětiúhelník složíme ze tří trojúhelníků tak, že trojúhelníky přiložíme k sobě stejně dlouhými stranami. Pětiúhelník složený ze tří trojúhelníků bude mít největší obvod, jestliže dva trojúhelníky přiložíme k třetímu stranami dlouhými 8 cm a 10 cm (obrázek 11), obvod je roven 3 . 12 + 10 + 8 = 54 cm. Nejmenší obvod bude mít, jestliže dva trojúhelníky přiložíme k třetímu stranami dlouhými 12 cm a 10 cm, obvod je roven 3 . 8 + 10 + 12 = 46 cm.



Obrázek 11