MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

51. ROČNÍK, 2001/2002

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v závislosti na soutěžních kategoriích probíhá v jednom, ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má domácí, okresní a oblastní kolo.
Kategorie Z8, Z7 a Z6 mají domácí a okresní kolo.
Kategorie Z5 má domácí a školní kolo.

I. kolo (domácí): Pro všechny kategorie se I. kolo organizuje na školách. Žáci v něm řeší šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **5. listopadu 2001** a druhou trojici úloh do **4. ledna 2002**.

Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **4. prosince 2001** a druhou trojici úloh do **3. března 2002**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje.* Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli I. kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresnímu výboru MO. Ten z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti ve II. kole soutěže. Výběr účastníků II. školního kola v kategorii Z5 provádí po dohodě s okresním výborem MO pořádající škola.

II. kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **30. ledna 2002**,
pro kategorii Z6 až Z8 **10. dubna 2002**,
pro kategorii Z5 **30. ledna 2002**.

II. kolo pro kategorie Z6 až Z9 je okresní a pořádá se zpravidla v okresním městě. II. kolo pro kategorii Z5 je školní a probíhá na pořádající škole.

Pozvaní žáci kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 1 hodiny.

III. kolo se pořádá pro kategorii Z9 a koná se **20. března 2002** v některém městě vaší oblasti. Pravidla soutěže jsou stejná jako pro II. kolo. Nejlepší účastníci III. kola jsou vyhlášeni jeho vítězi. Jejich jména budou uvedena v ročence 51. ročníku matematické olympiády na základních školách, kterou vydá ústřední výbor MO po skončení soutěže, a na internetu.

MO pořádají *ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední výbor MO* a v oblastech ji řídí *oblastní* *výbory MO* a pobočky JČMF. Na jednotlivých školách ji zajišťují učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2001/2002
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Informace o MO a zadání úloh najdete též na internetu

`http://home.pf.jcu.cz/~mo`

Na ukázku uvedeme **řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:**

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o* 4 *a druhou zmenšíme o* 5*, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1) \cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Pavel má ve stavebnici dřevěné krychle a kvádry. Hrana každé krychle měří 3 cm. Každý kvádr má rozměry 5 cm, 5 cm, 7 cm. Z celé stavebnice postavil Pavel věž vysokou 50 cm. Kolik dílů může mít ve stavebnici nejméně? Kolik dílů může mít ve stavebnici nejvíce? (Věž se staví tak, že v každé vrstvě je jen buď 1 krychle, nebo 1 kvádr.) (*Krállová*)

Z5–I–2

Plamínkovci vyrábějí svíčky pro celé Světýlkovo. Vosk roztavený ve velkém hrnci lijou do připravených forem. Z každé formy vyndají 5 svíček a očištěním formy od zbytků vosku získají materiál na výrobu ještě 1 svíčky. Všechny zbytky dohromady znovu roztaví a stejně jako předtím vyrábějí další svíčky. Tento postup opakují, dokud je možné voskem naplnit celou formu. Při prvním roztavení použili Plamínkovci veškerý vosk a vyrobili 360 svíček. Kolik svíček vyrobili při druhém tavení? Kolik svíček vyrobili dohromady? (*Krállová*)

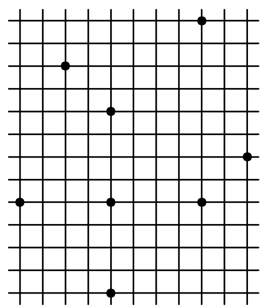
Z5–I–3

Za překročení rychlosti dávají v Slowlandu velké pokuty. Za každý km/h navíc oproti maximální povolené rychlosti zaplatíte 400 korun. Policie zastavila pana Quicka a řekla mu: „Jel jste rychlostí 93 km/h. Kdybyste jel ještě o 7 km/h rychleji, zaplatil byste pokutu 18 000 korun.“

a) Jaká je maximální povolená rychlost v Slowlandu?
b) Kolik zaplatil pan Quick za překročení rychlosti? (*Bednářová*)

Z5–I–4

Na obrázku jsou znázorněny všechny vrcholy dvou čtverců. Zjisti obsah jejich společné části (jeden čtvereček sítě má obsah 25 mm^2). (*Bednářová*)



Z5–I–5

Tramtarijské vlaky mají růžové a modré vagónky, které musí být seřazeny tak, aby žádné dva vagónky stejné barvy nebyly vedle sebe. Nový posunovač to nevěděl a za lokomotivu zařadil nejprve 5 růžových a potom 5 modrých vagónků. V jakém nejkratším čase to nyní může napravit, jestliže na pomocné koleji může vyměnit pořadí právě dvou sousedních vagónků a jedna taková výměna mu trvá 10 minut? (*Bednářová*)

Z5–I–6

Pestré číslo je takové, které nemá žádné dvě cifry stejné. *Zrcadlovým obrazem* čísla 102 958 je číslo 859 201. Jaký nejmenší a jaký největší pěticiferný výsledek můžeme dostat při sčítání dvou pestrých čtyřciferných čísel, z nichž jedno je zrcadlovým obrazem druhého? (*Bednářová*)

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Moje maminka se narodila 16. 3. 1948. Je to *pěkné* datum, platí totiž $16 \cdot 3 = 48$. Ve kterých letech 20. století bylo takových pěkných dat nejméně? Najděte všechna řešení. (*Bednářová*)

Z6–I–2

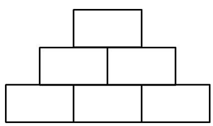
Dominik vymodeloval z plastelíny kvádr o rozměrech $6 \times 3 \times 19$ cm. Potom jej znovu rozválel a vymodeloval tři různě veliké krychle. Ke svému překvapení zjistil, že velikosti všech hran vyšly v centimetrech jako celá čísla. Jaké rozměry měly Dominikovy krychle? (*Hozová*)

Z6–I–3

Přirozené číslo je *veselé*, je-li dělitelné 9 nebo 13, *smutné*, je-li dělitelné 12, *hladové*, obsahuje-li alespoň jednu nulu, *malé*, je-li dvojciferné, a *velké*, je-li trojciferné a menší než 200. Jak velký obsah může mít obdélník, jehož šířka je malá, smutná a hladová, délka je velká, veselá a hladová a jehož obvod je také hladový? (*Ptáčková*)

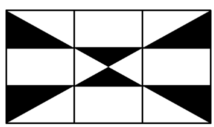
Z6–I–4

Doplňte do součinové „*pyramidy*“ přirozená čísla tak, aby největší doplněné číslo bylo 315 a žádná dvě doplněná čísla nebyla stejná. Kolika různými způsoby se to dá udělat? (*Bednářová*)



Z6–I–5

Ivan dostal speciální bílo-hnědou čokoládu. Zjisti hmotnost bílé části, pokud celá čokoláda má tři stejně široké řádky a tři stejně široké sloupce a váží 144 gramů. (*Krállová*)



Z6–I–6

Tři dalmatini a dva špici váží stejně jako 14 jezevčíků. Jeden dalmatin váží stejně jako jeden špic a tři jezevčíci. Kolik jezevčíků váží 101 dalmatinů? (Psi jedné rasy váží stejně.) (*Ptáčková*)

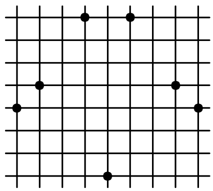
KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Jana pletla bratrovi Lukášovi šálu. Lukášovi se šála nelíbí, a tak vždy večer potají z řádků upletených ten den čtvrtinu vypáral. Jana začala plést v pondělí. V úterý upletla o 24 řad víc než v pondělí a ve středu dokonce dvakrát tolik jako v pondělí. Ve čtvrtek upletla už jen 36 řad a hotovou šálu dala Lukášovi. Kolik řad upletla Jana v úterý? Kolik řad vypáral Lukáš, jestliže hotová šála měla 180 řad? (*Krállová*)

Z7–I–2

Ve čtvercové síti na obrázku jsou znázorněny všechny vrcholy dvou čtverců. Zjistěte obsah jejich společné části (jeden čtvereček sítě má obsah $25\,\mathrm{mm}^2$). (*Bednářová*)



Z7–I–3

Martin měl vynásobit dvě desetinná čísla. Desetinné čárky si spletl s tečkami a vynásobil čtyři celá čísla. Násobil bez chyby a vyšlo mu 15 228. Správný výsledek však měl být 589,17. Jaká čísla měl násobit?

(*Krállová*)

Z7–I–4

Vedoucí v táboře rozdělovali děti do skupin po 5, poslední skupina však byla neúplná. Vedoucí je tedy zkusili rozdělit do skupin po 8 a opět to „nevyšlo“. Při druhém rozdělení bylo o 4 skupiny méně. V neúplných skupinách byl vždy sudý počet dětí. Kolik dětí mohlo být v táboře?

(*Krállová*)

Z7–I–5

Označte vrcholy krychle celými čísly od 1 do 8 tak, aby pro každou její stěnu byl součet příslušných čísel

a) prvočíslo;

b) jiné prvočíslo. (*Bednářová*)

Z7–I–6

Starý farmář se rozhodl, že celý svůj majetek — stádo ovcí — rozdělí mezi svoje děti. Nejdříve rozdělil stádo na dvě části v poměru 1 : 3. Menší z nich dal nejstaršímu synovi, větší opět rozdělil ve stejném poměru. Z nových částí tu menší přidělil druhorozenému, větší znovu rozdělil v poměru 1 : 3. Takto pokračoval, až každý z jeho synů dostal svůj díl, a zbývající část potom daroval své jediné dceři. Zjistěte, kolik měl farmář ovcí, pokud víte, že prostřední syn jich dostal 156. Které z dětí dostalo nejvíc ovcí?

(*Bednářová*)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

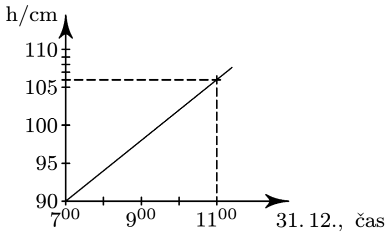
Míša si myslí trojciferné číslo. Jirkovi prozradil, že ciferný součet myšleného čísla je 8. Petrovi prozradil jen ciferný součin myšleného čísla. Petr správně určil, že takových čísel je 6 a řekl to Jirkovi. Ten řekl: „Už vím, jaké jsou cifry tohoto čísla, ale ještě mi to nestačí.“ Míša oběma chlapcům řekl: „Druhá mocnina poslední cifry není dělitelem myšleného čísla.“ To už chlapcům stačilo. Které to bylo číslo? (*Krállová*)

Z8–I–2

Přesně o půlnoci z 31. 12. na 1. 1. 2001 měli v Plavákově slavnostně otevřít nový, 160 cm hluboký bazén ve tvaru kvádru. Vodu do něho začali napouštět už 30. 12. Graf na obrázku znázorňuje, jak se měnila výška vodní hladiny v závislosti na čase.

a) Stihli včas napustit bazén?

b) Kdy přesně začali bazén napouštět? (*Bednářová*)



Z8–I–3

Starý farmář se rozhodl, že celý svůj majetek — stádo ovcí — rozdělí mezi svoje děti. Nejdříve rozdělil stádo na dvě části v poměru 1 : 3. Menší z nich dal nejstaršímu synovi, větší opět rozdělil ve stejném poměru. Z nových částí tu menší přidělil druhorozenému, větší znovu rozdělil v poměru 1 : 3. Takto pokračoval, až každý z jeho synů dostal svůj díl, a zbývající část potom daroval své jediné dceři. Zjistěte, kolik měl farmář synů, pokud víte, že jen jeden z nich dostal víc ovcí než dcera? (*Bednářová*)

Z8–I–4

Určete největší možný počet míčků o průměru 100 mm, které lze uložit do krabice tvaru kvádru o rozměrech 100 cm × 100 cm × 10 cm.

(*Krejčová*)

Z8–I–5

U nákladního automobilu se pneumatiky na předních kolech opotřebují po 15 000 km, na zadních — dvojitých kolech po 20 000 km. Řidič právě nakoupil soupravu šesti nových pneumatik. Kolik kilometrů maximálně může na nich najezdit? (*Krejčová*)

Z8–I–6

Úhlopříčky dělí kosočtverec s obvodem 40 cm na čtyři trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, z nichž každý má obvod 24 cm. Jaký největší obvod může mít

a) trojúhelník,
b) čtyřúhelník,
c) pětiúhelník

složený z těchto trojúhelníků? (Trojúhelníky se nesmějí překrývat a všechny čtyři je třeba použít.) (*Bednářová*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Čtyřúhelník, který nemá žádné dvě strany stejně dlouhé, nazveme *nerovnostranným*. Pravidelný dvanáctiúhelník má obsah $81\,\mathrm{cm}^2$. Narýsujte všechny takové tvarově různé nerovnostranné čtyřúhelníky s vrcholy ve vrcholech tohoto dvanáctiúhelníka a zjistěte obsah každého z nich.

(*Bednářová*)

Z9–I–2

Ve finále Zelení třikrát vyhráli a umístili se na 1. místě s celkovým skóre 7 : 1. Červení dosáhli skóre 2 : 3, Modří 3 : 3. Poslední Hnědí prohráli všechny tři zápasy a jejich celkové skóre bylo 1 : 6. Vyplňte tabulku, víte-li

	Zelení	Červení	Modří	Hnědí	skóre
Zelení					
Červení					
Modří					
Hnědí					

ještě, že Zelení porazili Červené 3 : 0 a že Červení i Modří právě jednou vyhráli, jednou prohráli a jednou remizovali. (*Volfová*)

Z9–I–3

Osově souměrný pětiúhelník s obsahem $27\,\mathrm{cm}^2$ má právě tři vnitřní úhly pravé a právě tři strany shodné. Zjistěte velikosti dalších dvou vnitřních úhlů pětiúhelníka a délku některé z trojice shodných stran.

(*Bednářová*)

Z9–I–4

Moje maminka se narodila 16. 3. 1948. Je to *pěkné* datum, platí totiž $16 \cdot 3 = 48$. Ve kterých letech 20. století bylo takových pěkných dat nejvíce?

(*Bednářová*)

Z9–I–5

Ke každé stěně krychle s hranou délky a jsme přilepili takový pravidelný čtyřboký jehlan, že vzniklo těleso s 12 stěnami. Kolik má toto těleso vrcholů? O kolik procent má slepené těleso větší objem než původní krychle? (*Krállová*)

Z9–I–6

Ostrov obrů má stejně obyvatel jako Ostrov trpaslíků. Ani na jednom z těchto ostrovů nežijí dvě stejně těžké bytosti a kromě dvou obrů a dvou trpaslíků má každý na svém ostrově dva kamarády, z nichž jeden je o 2 kg těžší a druhý o 2 kg lehčí. Dva nejtěžší trpaslíci váží dohromady tolik jako nejlehčí obr, tři „prostřední“ trpaslíci váží dohromady stejně jako prostřední obr a čtyři nejlehčí trpaslíci tolik co 8. nejtěžší obr. Zjistěte, kolik obyvatel má Ostrov trpaslíků a o kolik kilogramů je nejtěžší obr těžší než nejlehčí trpaslík. (*Bednářová*)

ÚSTŘEDNÍ VÝBOR MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

51. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Leták pro kategorie Z 5 – Z 9
Vydala Jednota českých matematiků a fyziků
pro vnitřní potřebu ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR
v 1. vydání
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák