Komentáře k domácímu kolu kategorie Z5

1. *Pavel má ve stavebnici dřevěné krychle a kvádry. Hrana každé krychle měří 3 cm. Každý kvádr má rozměry 5 cm, 5 cm, 7 cm. Z celé stavebnice postavil Pavel věž vysokou 50 cm. Kolik dílů může mít ve stavebnici nejméně? Kolik dílů může mít ve stavebnici nejvíce? (Věž se staví tak, že v každé vrstvě je jen buď 1 krychle, nebo 1 kvádr.)*

Řešení. 50 cm je třeba rozdělit na

$$x \cdot 7\,\mathrm{cm} + y \cdot 5\,\mathrm{cm} + z \cdot 3\,\mathrm{cm}.$$

Když chceme použít co nejméně dílů ze stavebnice, bude Pavel používat kvádry postavené „na výšku" a vhodně je doplní do výšky 50 cm. Kdyby si vzal 7 kvádrů, měl by $7 \cdot 7 = 49$ cm, takže by mu chyběl 1 cm. Ve stavebnici není díl, který by měl rozměr 1 cm. Proto Pavel použije méně kvádrů. Kdyby použil 6 kvádrů „na výšku", měl by $6 \cdot 7 = 42$ cm a zbývajících 8 cm může postavit použitím 1 kvádru „na šířku" a jedné kostky. Celkem použije 8 dílů, což je nejmenší možný počet dílů ve stavebnici.

Když má mít ve stavebnici co nejvíce dílů, měly by v ní být samé kostky nebo skoro samé kostky. Kdyby jich bylo 17, dala by se postavit věž s výškou $17 \cdot 3 = 51$ cm. To už je vyšší, než se Pavlovi podařilo poskládat. Proto ve stavebnici může být nejvíce 16 dílů. Ještě ověříme, jestli existuje skupina šestnácti dílů, ze které by Pavel mohl postavit svou 50 cm vysokou věž. Kdyby měl samé kostky, věž by byla nízká. Když použije 15 kostek, postaví věž vysokou $15 \cdot 3 = 45$ cm a zbývajících 5 cm doplní hranolem postaveným „na šířku". Stavebnice může mít nejvíce 16 dílů.

Návodné úlohy:

A. Petr má kousky provázků s délkami 24 cm, 15 cm, 23 cm, 22 cm, 18 cm, 12 cm a 21 cm. Vyberte z nich 3 tak, aby součet jejich délek byl největší a rozdíl délek každé dvojice byl aspoň 2 cm.

B. Karel umí udělat krok dlouhý 70 cm a skok dlouhý 100 cm. Na dvoře se postavil 11 metrů a 40 centimetrů od zdi. Kolika kroky a skoky se dostane přesně ke zdi? Kdy udělá nejméně pohybů? A kdy nejvíc?

C. Maminka poslala Marušku koupit knoflíky: na halenky po 7 kusech a na sukně po 4 kusech. Maruška správně přinesla 37 knoflíků. Kolika sukním a kolika halenkám bylo třeba přišít knoflíky?

D. Ve stánku na koupališti mají žvýkačky za 4 Kč, řezy za 5 Kč a lízátka za 3 Kč. Tomáš si dnes vzal všechny své úspory z prasátka a chce s kamarády utratit všech 53 Kč. Kolik nejvíce a kolik nejméně kusů sladkostí si za ně může koupit?

2. *Plamínkovci vyrábějí svíčky pro celé Světýlkovo. Vosk roztavený ve velkém hrnci lijou do připravených forem. Z každé formy vyndají 5 svíček a očištěním formy od zbytků vosku získají materiál na výrobu ještě 1 svíčky. Všechny zbytky dohromady znovu roztaví a stejně jako předtím vyrábějí další svíčky. Tento postup opakují, dokud je možné voskem naplnit celou formu. Při prvním roztavení použili Plamínkovci veškerý vosk a vyrobili 360 svíček. Kolik svíček vyrobili při druhém tavení? Kolik svíček vyrobili dohromady?*

Řešení. Když vyrobili Plamínkovci 360 svíček, museli mít naplněných $360 : 5 = 72$ forem. Zůstal jim vosk na 72 svíček. Ten po roztavení nalévali do forem. Do každé formy nalili vosk na 6 svíček a zaplnili $72 : 6 = 12$ forem. Z nich vybrali $12 \cdot 5 = 60$ svíček. Při druhém tavení vyrobili 60 svíček. Zbylý vosk (na 12 svíček) opět roztavili a nalili do $12 : 6 = 2$ forem. Z nich získali 10 svíček a zbylý vosk už nestačil na naplnění formy. Celkem vyrobili $360 + 60 + 10 = 430$ svíček.

Nesprávná řešení jsou taková, ve kterých se objeví zápisy podobné následujícímu: $72 : 5 = 14$ zb 2. Další chybou je úvaha: Máme vosk na 72 svíček, vyrábíme po pěticích, tedy vyrobíme 70 a poslední dvě se nedají dát do formy — nebude plná.

Návodné úlohy:

A. Maminka uvaří pudink a rozdělí ho do 4 misek. Na stěnách hrnce zůstane tolik pudinku, že by jím mohla naplnit ještě jednu misku. Tento pudink s oblibou Míša z hrnce „vylíže“. V září vařila takto pudink čtyřikrát. Kolik naplnila celkem misek? Kolik pudinku Míša „vylízal“? Kolik misek by naplnila, kdyby nic nenechávala v hrnci pro Míšu?

B. Anička si jednou přivezla z jarní dovolené rostlinku Pětikvítek s jedním stonkem. Vyznačuje se tím, že každé léto vyžene na každém stonku 5 pupenů. Jen tři z této pětice rozkvetou. Zbylé dva zaschnou a vytvoří nové stonky pro květy příštího léta. Nyní je na Pětikvítku 12 rozkvetlých květů. Kolik je na ní nových stonků? Kolik let má už Anička svůj Pětikvítek?

3. *Za překročení rychlosti dávají v Slowlandu velké pokuty. Za každý km/h navíc oproti maximální povolené rychlosti zaplatíte 400 korun. Policie zastavila pana Quicka a řekla mu: „Jel jste rychlostí 93 km/h. Kdybyste jel ještě o 7 km/h rychleji, zaplatil byste pokutu 18 000 korun.“*

a) Jaká je maximální povolená rychlost v Slowlandu?

b) Kolik zaplatil pan Quick za překročení rychlosti?

Řešení. $18\,000 : 400 = 45$, pan Quick by tedy jel o 45 km/h rychleji, než je povoleno, zároveň by jel rychlostí $93 + 7 = 100$ km/h. Proto je maximální povolená rychlost v Slowlandu $100 - 45 = 55$ km/h. Pan Quick ve skutečnosti překročil maximální povolenou rychlost o $93 - 55 = 38$ km/h a platil pokutu $38 \cdot 400 = 15\,200$ korun.

Návodná úloha:

Karel byl s otcem kupovat nové kolo. Kolo stálo 4 500 Kč a platili ve stokorunách. Kolik stokorun použili při placení? Kolika dvousetkorunovými bankovkami by mohli zaplatit, kdyby měli jen bankovky této hodnoty?

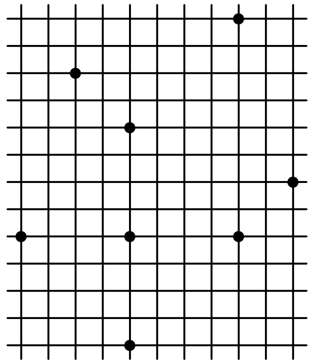
4. *Na obrázku 1 jsou znázorněny všechny vrcholy dvou čtverců. Zjisti obsah jejich společné části (jeden čtvereček sítě má obsah 25 mm^2).*

Jediná možnost dokreslení čtverců je na obrázku 2. Jejich společnou část tvoří čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou opět body čtvercové sítě. Celý čtyřúhelník lze „svisle“ rozdělit na dva trojúhelníky. Obsah každého z nich určíme buď přímo, nebo je ve čtvercové síti doplníme na obdélník a uvědomíme si, že obsah trojúhelníku je roven polovině obsahu obdélníku. Proto obsah $S = 16 : 2 = 8$ čtverečků $= 8 \cdot 25 = 200\,\mathrm{mm}^2$.

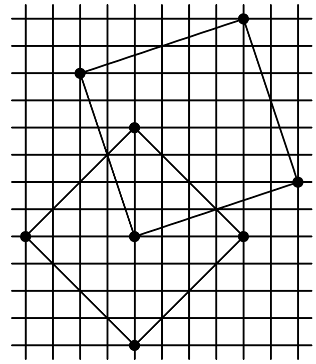
Návodné úlohy:

A. Ve čtvercové síti 3×3 najděte všechny tvarově různé čtverce.

B. Ve čtvercové síti určujte obsahy obdélníků, trojúhelníků a později i obecnějších mnohoúhelníků.



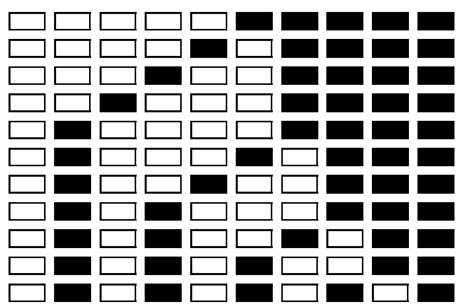
Obr. 1



Obr. 2

5. *Tramtarijské vlaky mají růžové a modré vagónky, které musí být seřazeny tak, aby žádné dva vagónky stejné barvy nebyly vedle sebe. Nový posunovač to nevěděl a za lokomotivu zařadil nejprve 5 růžových a potom 5 modrých vagónků. V jakém nejkratším čase to nyní může napravit, jestliže na pomocné koleji může vyměnit pořadí právě dvou sousedních vagónků a jedna taková výměna mu trvá 10 minut?*

Řešení. Označme růžový vagónek prázdným a modrý plným obdélníčkem. Nechme posunovače postupně modré vagónky měnit za růžové. Tedy první modrý bude měněn za růžový před ním, dokud se nedostane na druhé místo za lokomotivou, potom bude měněn druhý modrý atd. Jak je vidět z níže uvedeného schématu, výměn bude 10, takže posunovač bude potřebovat $10 \cdot 10 = 100$ minut $= 1$ hodinu a 40 minut.



Návodné úlohy:

A. Housenka Žofka si jde plést kuklu. Chce, aby se z ní vylíhnul co nejbarevnější motýl, proto ji vyrábí pruhovanou. Používá zlaté, modré a červené nitě. Pruhy se mají střídat tak, že v žádné trojici za sebou jdoucích pruhů nebudou dva pruhy stejné barvy. Celkem potřebuje Žofka uplést 17 pruhů. Rozhodla se, že začne modrým a skončí červeným. Jak má Žofka střídat nitě, aby byla kukla podle jejích představ?

B. Na úzkém visutém mostě nad propastí se potkala skupina čtyř děvčat a proti nim skupina tří chlapců. Nikdo nechce ustoupit, a tak se dohodli, že chlapci budou přelézat kolem děvčat z vnější strany mostu. Aby ho příliš nerozkývali, musí přelézat po jednom. Takovéto obcházení jednoho děvčete jedním chlapcem trvá 4 minuty. Za jak dlouho se na mostě vymění?

6. *Pestré číslo je takové, které nemá žádné dvě cifry stejné. Zrcadlovým obrazem čísla 102 958 je číslo 859 201. Jaký nejmenší a jaký největší pěticiferný výsledek můžeme dostat při sčítání dvou pestrých čtyřciferných čísel, z nichž jedno je zrcadlovým obrazem druhého?*

Řešení. Jde o čísla s různými ciframi a úlohu můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D \\ D\,C\,B\,A \\ \hline *\;*\;*\;*\;* \end{array}$$

přičemž výsledek má být největší (nejmenší) možný. Největší výsledek zřejmě získáme, když budeme volit největší možné cifry A, B, C, D. Zkusíme tedy:

$$\begin{array}{r} 9\,8\,7\,6 \\ 6\,7\,8\,9 \\ \hline 1\,6\,6\,6\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\,8\,6\,7 \\ 7\,6\,8\,9 \\ \hline 1\,7\,5\,5\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\,6\,7\,8 \\ 8\,7\,6\,9 \\ \hline 1\,8\,4\,4\,7 \end{array}$$

Největší výsledek jsme dostali v posledním součtu. Větší už být nemůže, protože se nedá zvětšit součet $A + D$. Největší možný výsledek je 18 447 a vznikl, když číslo $ABCD$ bylo jedním z následujících: 9 678, 9 768, 8 679, 8 769.

Nejmenší výsledek zkusíme získat použitím nejmenších možných cifer:

$$\begin{array}{r} 1\,3\,0\,2 \\ 2\,0\,3\,1 \\ \hline 3\,3\,3\,3 \end{array}$$

V tomto případě je výsledek jen čtyřciferný. Abychom dostali pěticiferný výsledek musí:

a) $A + D = 10$ a současně $B + C = \text{minimum} = 1$, například:

$$\begin{array}{r} 4\,0\,1\,6 \\ 6\,1\,0\,4 \\ \hline 1\,0\,1\,2\,0 \end{array}$$

b) $A + D = 9$ a současně $B + C = 10$, například:

$$\begin{array}{r} 4\,2\,8\,5 \\ 5\,8\,2\,4 \\ \hline 1\,0\,1\,0\,9 \end{array}$$

Z uvedeného je vidět, že nejmenší možný výsledek je 10 109 a vznikne, když číslo $ABCD$ bude jedním z následujících 36 čísel:

4 195, 4 915, 4 285, 4 825, 4 375, 4 735, 5 914, 5 194, 5 284, 5 824, 5 374, 5 734, 3 196, 3 916, 3 286, 3 826, 6 193, 6 913, 6 283, 6 823, 2 197, 2 917, 2 467, 2 647, 7 192, 7 912, 7 462, 7 642, 1 378, 1 738, 1 468, 1 648, 8 731, 8 731, 8 461, 8 641.

Návodné úlohy:

A. Láďa má kartičky s ciframi 2, 5, 4, 7, 1, 3 (každou jednou). Vytvořte z nich zadání úlohy na sčítání dvou trojciferných čísel, jejichž výsledek bude největší (nejmenší) možný.
B. Kolik je pestrých čísel větších než 3 820 a menších než 3 845?
C. Vytvořte zrcadlové obrazy čísel: 53 276, 2 187, 210, 2 236, 588 800, 121.
D. Výsledky úlohy C zapište bez zbytečných nul a opět k nim vytvořte zrcadlové obrazy. Kolikrát se poslední výsledek neshoduje s číslem ze zadání úlohy C?