Komentáře k domácímu kolu kategorie Z7

1. *Jana pletla bratrovi Lukášovi šálu. Lukášovi se šála nelíbí, a tak vždy večer potají z řádků upletených ten den čtvrtinu vypáral. Jana začala plést v pondělí. V úterý upletla o 24 řad víc než v pondělí a ve středu dokonce dvakrát tolik jako v pondělí. Ve čtvrtek upletla už jen 36 řad a hotovou šálu dala Lukášovi. Kolik řad upletla Jana v úterý? Kolik řad vypáral Lukáš, jestliže hotová šála měla 180 řad?*

Řešení. Zapíšeme zadání symbolicky:

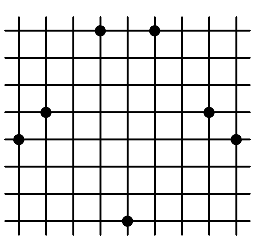
Pondělí ...	x řádků	vypáral $\cdots$	$\frac{x}{4}$ řádků
Úterý ...	$x+24$ řádků	vypáral ...	$\frac{x+24}{4}$ řádků
Středa ...	$2x$ řádků	vypáral ...	$\frac{2x}{4}$ řádků
Čtvrtek ...	36 řádků	vypáral ...	0 řádků, hotová šála

Jana dohromady upletla $x+x+24+2x+36=4x+60$ řádků.
Lukáš dohromady vypáral $\frac{x}{4}+\frac{x+24}{4}+\frac{2x}{4}=x+6$ řádků. Proto

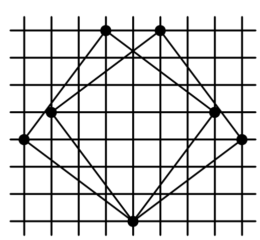
$$180 = 4x+60-x-6$$
$$x = 42$$

V úterý Jana upletla $42+24=66$ řádků. Lukáš vypáral $42+6=48$ řádků.

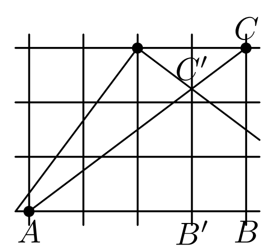
2. *Ve čtvercové síti na obrázku 1 jsou znázorněny všechny vrcholy dvou čtverců. Zjistěte obsah jejich společné části (jeden čtvereček sítě má obsah $25\,mm^2$).*



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Řešení. Na obrázku 2 jsou dokresleny čtverce a zvýrazněna jejich společná část. Vidíme, že se jedná o čtyřúhelník, který je souměrný podle svislé osy. Proto stačí spočítat obsah „levého“ trojúhelníku. Hledaný obsah pak bude dvojnásobkem obsahu uvažovaného trojúhelníku. Na výpočet obsahu použijeme známý vzorec $S=\frac{z\cdot v}{2}$. Obsah jednoho čtverečku sítě je $0{,}25\,\mathrm{cm}^2$, tedy čtvereček má stranu $0{,}5\,\mathrm{cm}$. Potom výška trojúhelníka je $3\cdot 0{,}5=1{,}5\,\mathrm{cm}$. Zbývá určit délku základny. Z obrázku 3 je vidět, že trojúhelníky

ABC a $AB'C'$ jsou podobné. Odtud je zřejmé, že úsečka $B'C'$ měří 2,25 čtverečku, tj. 1,125 cm. Tedy základna trojúhelníka má velikost $z = 4 \cdot 0{,}5 + 1{,}125 = 3{,}125\,\mathrm{cm}$. Obsah trojúhelníku je:

$$S = \frac{3{,}125 \cdot 1{,}5}{2}$$

a obsah společné části čtverců je

$$S' = 3{,}125 \cdot 1{,}5 = 4{,}687\,5\,\mathrm{cm}^2 = 468{,}75\,\mathrm{mm}^2.$$

3. *Martin měl vynásobit dvě desetinná čísla. Desetinné čárky si spletl s tečkami a vynásobil čtyři celá čísla. Násobil bez chyby a vyšlo mu 15 228. Správný výsledek však měl být 589,17. Jaká čísla měl násobit?*

Řešení. Víme, že Martin násobil 4 celá čísla a výsledek není nula, takže obě desetinná čísla musela mít za desetinnou čárkou aspoň jednu platnou číslici. Zkusíme rozložit Martinův výsledek na součin prvočísel a jedničky. Dostaneme: $15\,228 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 47$. V rozkladu se nevyskytuje číslo 5, proto z počtu desetinných míst správného výsledku vyplývá, že obě desetinná čísla měla za desetinnou čárkou právě jednu platnou číslici. Poslední číslice správného výsledku je 7. Tu můžeme získat při násobení jednociferných čísel (za desetinou čárkou): $1 \cdot 7$ anebo $3 \cdot 9$. V našem případě to může být jen $3 \cdot 9$ (z rozkladu). Vytvořme tabulku, jaká čísla mohla být v zadání úlohy. Přitom použijeme rozklad Martinova výsledku:

a	b	$a \cdot b$
47,3	12,9	610,17
47,9	12,3	589,17
141,3	4,9	692,37
141,9	4,3	610,17
282,3	2,9	818,67
282,9	2,3	650,67
564,3	1,9	1 072,17
564,9	1,3	734,37
94,3	6,9	650,67
94,9	6,3	597,87
188,3	3,9	734,37
188,9	3,3	623,37

Z tabulky je vidět, že Martin měl vynásobit čísla 47,9 a 12,3.

4. *Vedoucí v táboře rozdělovali děti do skupin po 5, poslední skupina však byla neúplná. Vedoucí je tedy zkusili rozdělit do skupin po 8 a opět to „nevyšlo“. Při druhém rozdělení bylo o 4 skupiny méně. V neúplných skupinách byl vždy sudý počet dětí. Kolik dětí mohlo být v táboře?*

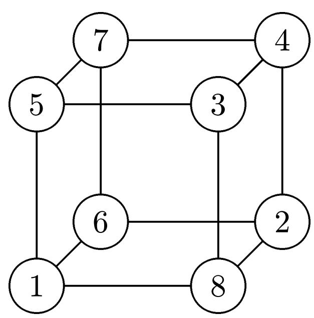
Řešení. Počet skupin po 5 dětech označme x. Ze zadání určitě víme, že $x > 4$. Zkoumejme, jaké jsou možnosti pro počty dětí při jednotlivých hodnotách x:

x	$5x+2$	$5x+4$	$x-4$	$8(x-4)+2$	$8(x-4)+4$	$8(x-4)+6$	dětí
5	27	29	1	10	12	14	–
6	32	34	2	18	20	22	–
7	37	39	3	26	28	30	–
8	42	44	4	34	36	38	–
9	47	49	5	42	44	46	–
10	52	54	6	50	52	54	52 nebo 54
11	57	59	7	58	60	62	–
12	62	64	8	66	68	70	–

V táboře mohlo být 52 nebo 54 dětí.

5. *Označte vrcholy krychle celými čísly od 1 do 8 tak, aby pro každou její stěnu byl součet příslušných čísel*
a) prvočíslo;
b) jiné prvočíslo.

Řešení. Prvočísla jsou: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...
Nejmenší možný součet z čísel, která máme vpisovat je $1+2+3+4=10$.
Největší možný součet z čísel, která máme vpisovat, je $5+6+7+8=26$.
V úvahu tedy přichází prvočísla 11, 13, 17, 19, 23. Je jich jen 5, ale kostka má 6 stěn. Proto odpověď na otázku b) zní: „Nelze.“
Na otázku a) stačí nakreslit jedno z možných řešení, například:



6. *Starý farmář se rozhodl, že celý svůj majetek — stádo ovcí — rozdělí mezi svoje děti. Nejdříve rozdělil stádo na dvě části v poměru 1 : 3. Menší z nich dal nejstaršímu synovi, větší opět rozdělil ve stejném poměru. Z nových částí tu menší přidělil druhorozenému, větší znovu rozdělil v poměru 1 : 3. Takto pokračoval, až každý z jeho synů dostal svůj díl, a zbývající část potom daroval své jediné dceři. Zjistěte, kolik měl farmář ovcí, pokud víte, že prostřední syn jich dostal 156. Které z dětí dostalo nejvíc ovcí?*

Řešení. Jestliže prostřední syn dostal 156 ovcí, zůstalo ještě $3 \cdot 156 = 468$ ovcí. Syn byl prostřední, takže musel mít ještě aspoň jednoho syna. Zbylé ovce dělil na 4 části a jednu dal dalšímu synovi: $468 : 4 = 117$. Zůstalo mu tedy na dělení $468 - 117 = 351$ ovcí. 351 ovcí se už nedá rozdělit na 4 části, tedy je musela všechny dostat dcera. Farmář proto měl tři syny. Když dával ovce prostřednímu, musel jich mít $468 + 156 = 624$, což je trojnásobek toho, co dal prvorozenému. Prvorozený tedy dostal $624 : 3 = 208$ ovcí.

Nejvíc ovcí (351) tedy dostala dcera.

Farmář měl celkem $351 + 117 + 156 + 208 = 832$ ovcí.