Komentáře k domácímu kolu kategorie Z8

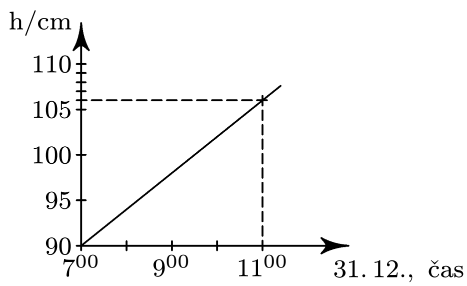
1. *Míša si myslí trojciferné číslo. Jirkovi prozradil, že ciferný součet myšleného čísla je 8. Petrovi prozradil jen ciferný součin myšleného čísla. Petr správně určil, že takových čísel je 6 a řekl to Jirkovi. Ten řekl: „Už vím, jaké jsou cifry tohoto čísla, ale ještě mi to nestačí.“ Míša oběma chlapcům řekl: „Druhá mocnina poslední cifry není dělitelem myšleného čísla.“ To už chlapcům stačilo. Které to bylo číslo?*

Řešení. Probereme všechny možnosti a zapíšeme je do tabulky. Jirka hledá možné rozklady 8 na součet tří nenulových přirozených čísel — 1. sloupec. Těmto rozkladům odpovídá jistý ciferný součin — 2. sloupec. Stejný ciferný součin musí vzniknout z právě šesti různých čísel (tomu vyhovuje pouze druhý řádek).

rozklad 8 (ciferný součet)	ciferný součin	možné rozklady (počet čísel)	
6, 1, 1	6	$6\cdot 1\cdot 1$ (3) $3\cdot 2\cdot 1$ (6)	NEVYHOVUJE
5, 2, 1	10	$5\cdot 2\cdot 1$ (6)	VYHOVUJE
4, 3, 1	12	$6\cdot 2\cdot 1$ (6) $3\cdot 2\cdot 2$ (3)	NEVYHOVUJE
4, 2, 2	16	$8\cdot 2\cdot 1$ (6) $4\cdot 4\cdot 1$ (3)	NEVYHOVUJE
3, 3, 2	18	$9\cdot 2\cdot 1$ (6) $3\cdot 3\cdot 1$ (3)	NEVYHOVUJE

Nyní je zřejmé, že stačí uvažovat pouze čísla 125, 152, 215, 251, 512 a 521. Využijeme poslední podmínku: „druhá mocnina poslední cifry není dělitelem hledaného čísla“. Odtud je zřejmé, že poslední cifra není 1. Zbývají čísla 125, 152, 215 a 512. Vzhledem k tomu, že 125 je dělitelné 25, 152 i 512 jsou dělitelná 4, zbývá jedině číslo 215, které je hledaným číslem.

2. *Přesně o půlnoci z 31. 12. na 1. 1. 2001 měli v Plavákově slavnostně otevřít nový, 160 cm hluboký bazén ve tvaru kvádru. Vodu do něho začali napouštět už 30. 12. Graf na obrázku znázorňuje, jak se měnila výška vodní hladiny v závislosti na čase.*



a) Stihli včas napustit bazén?

b) Kdy přesně začali bazén napouštět?

Řešení. Podíváme-li se na graf vidíme, že v 7 hodin byla hladina bazénu 90 cm a v 11 hodin to bylo 106 cm, neboli se za 4 hodiny hladina zvýšila o 16 cm. Vzhledem k pravidelnosti bazénu (tvar kvádru) je jasné, že za hodinu se hladina vody zvýší o 4 cm.

a) Zbývá napustit ještě $160 - 106 = 54$ cm. K tomu je zapotřebí ještě $54 : 4 = 13{,}5$ hodiny. Vidíme tedy, že bazén bude plný až 30 minut po půlnoci, tedy nebude včas napuštěn.

b) K napuštění 90 cm je třeba $90 : 4 = 22{,}5$ hodiny, což znamená že napuštění bazénu začalo 30. 12. v 8 hodin 30 minut.

3. *Starý farmář se rozhodl, že celý svůj majetek — stádo ovcí — rozdělí mezi svoje děti. Nejdříve rozdělil stádo na dvě části v poměru* $1 : 3$. *Menší z nich dal nejstaršímu synovi, větší opět rozdělil ve stejném poměru. Z nových částí tu menší přidělil druhorozenému, větší znovu rozdělil v poměru* $1 : 3$. *Takto pokračoval, až každý z jeho synů dostal svůj díl, a zbývající část potom daroval své jediné dceři. Zjistěte, kolik měl farmář synů, pokud víte, že jen jeden z nich dostal víc ovcí než dcera?*

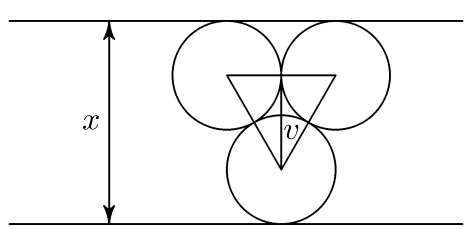
Řešení. Pokud si počet ovcí ve farmářově stádu označíme x, musíme si uvědomit, že prvnímu synovi dává čtvrtinu stáda, druhému šestnáctiny atd. Práce s takovými zlomky může činit žákům jisté potíže. To lze obejít tak, že označíme počet ovcí ve farmářově stádu jako nějakou mocninu čtyř, např. předpokládejme, že farmář měl $1\,024x$ ovcí. Pak už je řešení snadné a můžeme ho schematicky zapsat do tabulky:

syn	dostal ovcí	zbývá	
1.	$\frac{1}{4} \cdot 1\,024x = 256x$	$1\,024x - 256x = 768x$	
2.	$\frac{1}{4} \cdot 768x = 192x$	$768x - 192x = 576x$	
3.	$\frac{1}{4} \cdot 576x = 144x$	$576x - 144x = 432x$	
4.	$\frac{1}{4} \cdot 432x = 108x$	$432x - 108x = 324x$	
5.	$\frac{1}{4} \cdot 324x = 81x$	$324x - 81x = 243x$	← to dostane dcera
6.	$\frac{1}{4} \cdot 243x \doteq 61x$	$243x - 61x = 182x$	NELZE - dcera by měla méně než 2. syn

Vidíme, že farmář měl 5 synů (pokud by jich měl více, dostala by dcera méně ovcí než druhorozený syn).

4. *Určete největší možný počet míčků o průměru 100 mm, které lze uložit do krabice tvaru kvádru o rozměrech 100 cm × 100 cm × 10 cm.*

Řešení. Nabízí se jednoduché řešení, dát míčky do 10 řad po 10, tj. celkem 100 míčků, ale to není bohužel správně. Druhá možnost je pokusit se vyplňovat „mezery mezi řadami“ (obr. 1).



Obr. 1

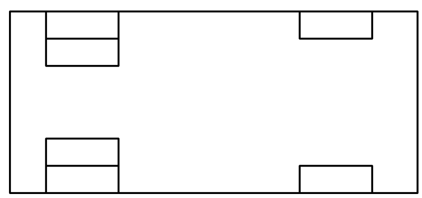
Především musíme určit v tj. výšku rovnostranného trojúhelníku. Z Pythagorovy věty snadno zjistíme, že $v = 5 \cdot \sqrt{3} \doteq 8{,}66\,\mathrm{cm}$. Vidíme tedy, že pokud přidáme řadu tímto způsobem „zabereme“ pruh o šířce 8,66 cm, tj. $x = 18{,}66\,\mathrm{cm}$. Avšak v první takto přidané řadě je pouze 9 míčků, v další 10 a situace se stále opakuje. Nyní musíme zjistit kolik řad má mít 10 a kolik 9 míčků.

1. varianta: první řada má 10 míčků, druhá 9, třetí 10 atd., celkem dáme 10 řad. Zabereme tak $10+9\cdot 8{,}66 = 87{,}94\,\mathrm{cm}$. Poslední 11. řada bude mít opět 10 míčků. Celkem dáme do krabice $6 \cdot 10 + 5 \cdot 9 = 105$ míčků (a v krabici zůstane cca 2 cm široký volný pruh).

2. varianta: Postupujeme stejně jako v prvním případě, ale dáme pouze 9 řad. Zabereme tak $10 + 8 \cdot 8{,}66 = 79{,}28\,\mathrm{cm}$. Poslední dvě řady 10. a 11. budou mít 10 míčků. Celkem dáme do krabice $7 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 106$ míčků, což je hledané řešení.

5. *U nákladního automobilu se pneumatiky na předních kolech opotřebují po 15 000 km, na zadních — dvojitých kolech po 20 000 km. Řidič právě nakoupil soupravu šesti nových pneumatik. Kolik kilometrů maximálně může na nich najezdit?*

Řešení. Schematicky si můžeme nákladní automobil představit takto:



Z obrázku je patrné, že se v úvahách stačí omezit např. na pravou stranu auta a uvažovat pouze 3 pneumatiky. Představme si, co se stane, pokud řidič pneumatiky nemění. Pak ujede 15 000 km, přední pneumatika je zničena a obě zadní jsou opotřebeny ze $\frac{3}{4}$, což je stejné jako kdyby řidiči zbyla jedna pneumatika opotřebena z jedné poloviny. Pak ale je jasné, že k ujetí 15 000 km potřebuje 2,5 pneumatiky. Máme zjistit kolik kilometrů ujede na tři pneumatiky. Jedná se o přímou úměrnost, tj.

$$\begin{array}{r@{\ \ldots\ldots\ldots\ }l}
15\,000\,\mathrm{km} & 2{,}5 \text{ pneumatiky}\\
x\,\mathrm{km} & 3 \text{ pneumatiky}\\ \hline
\end{array}$$
$$x = \frac{15\,000 \cdot 3}{2,5} = 18\,000.$$

Uvedený výsledek také dává návod řidiči jak má pneumatiky měnit. Je zřejmé, že každá z pneumatik musí být vpředu stejnou dobu, tj. 6 000 km. Zkouškou se snadno ověří, že při takovémto způsobu výměny budou současně opotřebeny všechny pneumatiky po ujetí 18 000 km.

Ke stejnému výsledku lze dojít sestavováním rovnice či využitím nejmenšího společného násobku.

6. *Úhlopříčky dělí kosočtverec s obvodem 40 cm na čtyři trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, z nichž každý má obvod 24 cm. Jaký největší obvod může mít*

a) trojúhelník,

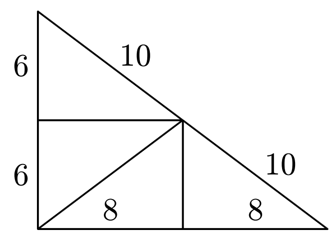
b) čtyřúhelník,

c) pětiúhelník

složený z těchto trojúhelníků? (Trojúhelníky se nesmějí překrývat a všechny čtyři je třeba použít.)

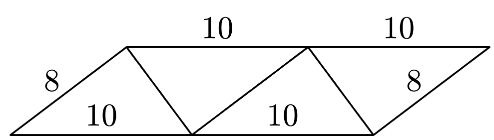
Řešení. Ze zadání příkladu je zřejmé, že kosočtverec se rozdělí na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky o stranách 10, 8 a 6 cm. Jejich složením máme vytvořit postupně trojúhelník, čtyřúhelník a pětiúhelník o maximálním možném obvodu. Úlohu lze řešit zpočátku pokusně a teprve po určitých zkušenostech činit jisté obecnější závěry. Následující obrázky ukazují možná řešení.

a)



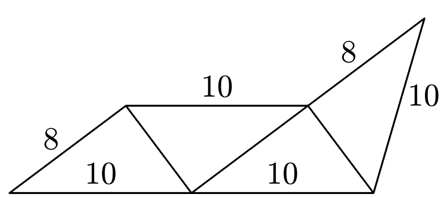
Obvod je $8 + 8 + 10 + 10 + 6 + 6 = 48$ cm.

b) Lze uvažovat i nekonvexní čtyřúhelníky.



Obvod je $10 + 10 + 8 + 10 + 10 + 8 = 56$ cm.

c) Lze uvažovat i nekonvexní pětiúhelníky.



Obvod je $10 + 10 + 10 + 8 + 10 + 8 = 56$ cm.