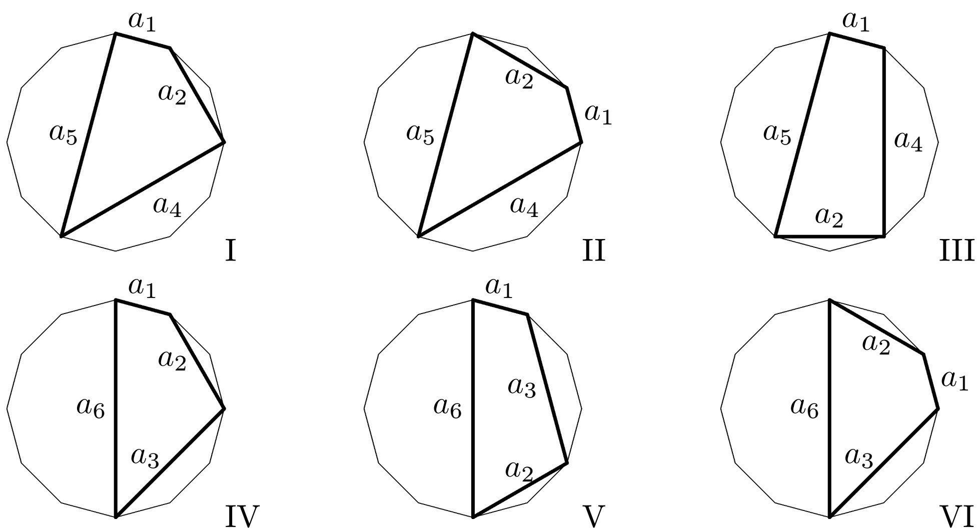
Komentáře k domácímu kolu kategorie Z9

1. *Čtyřúhelník, který nemá žádné dvě strany stejně dlouhé, nazveme nerovnostranným. Pravidelný dvanáctiúhelník má obsah 81 cm². Narýsujte všechny takové tvarově různé nerovnostranné čtyřúhelníky s vrcholy ve vrcholech tohoto dvanáctiúhelníka a zjistěte obsah každého z nich.*

Řešení. Dostaneme celkem šest čtyřúhelníků (obr. 1, jejich strany označíme a_1, spojují-li sousední vrcholy 12-úhelníku, a_2, spojují-li vrcholy 12-úhelníku „přes jeden vrchol" atd.)



Obr. 1

Čtyřúhelníky I, II, III mají stejný obsah — totéž platí pro čtyřúhelníky IV, V, VI (to lze prokázat tak, že jejich vrcholy spojíme se středem 12-úhelníku v obou případech získáme potvrzení platnosti tvrzení — čtyřúhelníky jsou složeny z týchž trojúhelníků, jejichž obsahy označíme pro I, II, III jako S_1, S_2, S_4, S_5, pro IV, V, VI jako S_1, S_2, S_3 (S_6 se změní v úsečku)).

$S_1 = S_{\triangle ABS} \ldots \frac{1}{12}$ obsahu 12-úhelníku, tj. $\frac{81}{12} = \frac{27}{4} = 6{,}75$ (cm²).

$S_2 = S_{\triangle BCS} \ldots$ je rovnostranný trojúhelník, $S_2 = \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ (výška $\frac{r}{2}\sqrt{3}$).

Platí (E je vrchol 12-úhelníku)

$$S_{\triangle BCS} = S_{\triangle BES} + S_{\triangle ECS} - S_{\triangle BEC},$$

$$\frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{27}{4} + \frac{27}{4} - \frac{r}{2} \cdot \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right),$$

$$r^2 = 27 \quad \Rightarrow \quad r = 3\sqrt{3} \doteq 5{,}2 \text{ (cm)},$$

$$S_2 = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{9 \cdot 3}{4}\sqrt{3} = \frac{27}{4}\sqrt{3} \doteq 11{,}7 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

V trojúhelníku CSD spustíme kolmici z bodu S na DC; patu označíme F; získáme 2 shodné trojúhelníky, $\triangle SCF$ a $\triangle SDF$ (mají úhly $60°$, $30°$, $90°$; přeponu r; $|DF| = |FC|$); lze z nich složit $\triangle SCD'$ (obr. 2), který je shodný s $\triangle BCS$ ($\triangle SCD' \cong \triangle BCS$).

$$S_4 = S_{\triangle SCD} = S_{\triangle SCD'} = S_{\triangle BCS} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{27}{4}\sqrt{3} \doteq 11{,}7\ (\mathrm{cm}^2).$$

Obdobně v trojúhelníku ASD spustíme kolmici z S na AD; patu výšky označme G; získáme 2 shodné trojúhelníky, $\triangle ASG \cong \triangle DSG$ (s úhly $75°$, $15°$, $90°$); jejich složením lze získat $\triangle SDA'$ (obr. 2), který je shodný s $\triangle SAB$ ($\triangle SDA' \cong \triangle SAB$). Proto

$$S_5 = S_1 = \frac{27}{4} = 6{,}75\ (\mathrm{cm}^2).$$

První tři čtyřúhelníky tedy mají obsah

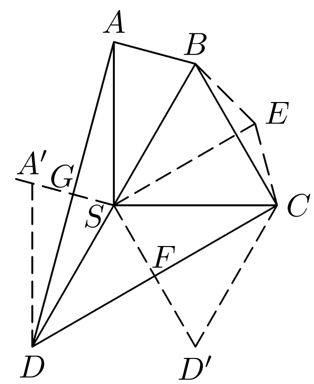
$$S_1 + S_2 + S_4 + S_5 = \frac{27}{4} \cdot 2 + \frac{27 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{27}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \doteq 36{,}88\ (\mathrm{cm}^2).$$

Pro čtyřúhelníky IV, V, VI bude $S = S_1 + S_2 + S_3$ $(+S_6 = 0)$. Již známe $S_1 = \frac{27}{4}$, $S_2 = \frac{27}{4}\sqrt{3}$, trojúhelník s obsahem S_3 je rovnoramenný pravoúhlý a platí

$$S_3 = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = \frac{27}{2}.$$

Druhé tři čtyřúhelníky mají obsah

$$S = \frac{27}{4} + \frac{27\sqrt{3}}{4} + \frac{27}{2} = \frac{27}{4} \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right) \doteq 31{,}94\ (\mathrm{cm}^2).$$



Obr. 2

(*Poznámka*: Má-li řešitel znalosti o goniometrických funkcích, lze obsahy počítat pomocí sinů a kosinů bez náročnějšího uvažování.)

2. *Ve finále Zelení třikrát vyhráli a umístili se na 1. místě s celkovým skóre* 7 : 1. *Červení dosáhli skóre* 2 : 3, *Modří* 3 : 3. *Poslední Hnědí prohráli všechny tři zápasy a jejich celkové skóre bylo* 1 : 6. *Vyplňte tabulku, víte-li ještě, že Zelení porazili*

	Zelení	*Červení*	*Modří*	*Hnědí*	*skóre*
Zelení	╳				
Červení		╳			
Modří			╳		
Hnědí				╳	

Červené 3 : 0 *a že Červení i Modří právě jednou vyhráli, jednou prohráli a jednou remizovali.*

Řešení. Pokud zaneseme všechny známé informace do tabulky dostaneme

	Zelení	Červení	Modří	Hnědí	skóre	
Zelení		3 : 0			7 : 1	3 výhry
Červení	0 : 3				2 : 3	1 výhra, 1 remíza, 1 prohra
Modří					3 : 3	1 výhra, 1 remíza, 1 prohra
Hnědí					1 : 6	3 prohry

Uvažujme nyní Červené, kteří ještě mají „rozdat“ 2 : 0 (aby měli skóre 2 : 3). Jednou mají remizovat — to je možné jen s Modrými výsledkem 0 : 0. Pak ale musí nad Hnědými vyhrát 2 : 0. Doplníme tabulku a dostaneme

	Zelení	Červení	Modří	Hnědí	skóre
Zelení		3 : 0			7 : 1
Červení	0 : 3		0 : 0	2 : 0	2 : 3
Modří		0 : 0			3 : 3
Hnědí		0 : 2			1 : 6

Uvažujme Modré, kteří mají „rozdat“ 3 : 3. Musí vyhrát nad Hnědými, ale mohou od nich dostat maximálně 1 gól. Musí prohrát se Zelenými a přitom jim mohou dát maximálně 1 gól. Odtud je zřejmé, že Hnědým musí dát aspoň 2 góly (2 nebo 3). Máme tak následující možnosti:

Modří : Hnědí	⇒ Modří : Zelení	⇒ závěr
3 : 1	0 : 2	Hnědí mají zatím skóre 1 : 5, se Zelenými by měli prohrát 0 : 1 SPOR (Zelení by měli 6 : 0)
3 : 0	0 : 3	Hnědí mají zatím skóre 0 : 5, se Zelenými by měli hrát 1 : 1 SPOR (mají třikrát prohrát)
2 : 1	1 : 2	Hnědí mají zatím skóre 1 : 4, se Zelenými budou hrát 0 : 2 VYHOVUJE ZADÁNÍ
2 : 0	1 : 3	Hnědí mají zatím skóre 0 : 4, se Zelenými by měli hrát 1 : 2 SPOR (Zelení by měli skóre 8 : 2)

Hledaná tabulka má tvar

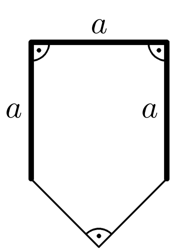
	Zelení	Červení	Modří	Hnědí	skóre
Zelení		3 : 0	2 : 1	2 : 0	7 : 1
Červení	0 : 3		0 : 0	2 : 0	2 : 3
Modří	1 : 2	0 : 0		2 : 1	3 : 3
Hnědí	0 : 2	0 : 2	1 : 2		1 : 6

3. *Osově souměrný pětiúhelník s obsahem 27 cm^2 má právě tři vnitřní úhly pravé a právě tři strany shodné. Zjistěte velikosti dalších dvou vnitřních úhlů pětiúhelníka a délku některé z trojice shodných stran.*

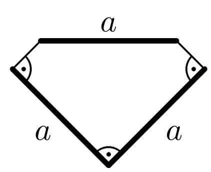
Řešení. Osa musí procházet středem jedné strany a protějším vrcholem:

3 strany shodné — strana, jejímž středem prochází osa, a dvojice souměrně položených stran (2 možnosti, obr. 3 a 4)

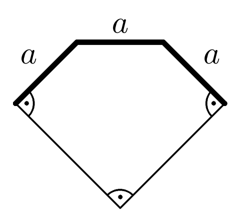
3 úhly pravé — úhel, jehož vrcholem prochází osa, a dvojice souměrně položených úhlů (2 možnosti, obr. 5 a 6)



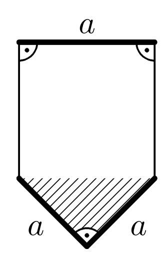
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Zdá se, že by mohla být 4 řešení.

Situace z obr. 6 nemůže nastat, vyšrafovaný trojúhelník by měl být rovnostranný a zároveň pravoúhlý.

1. možnost (obr. 7)

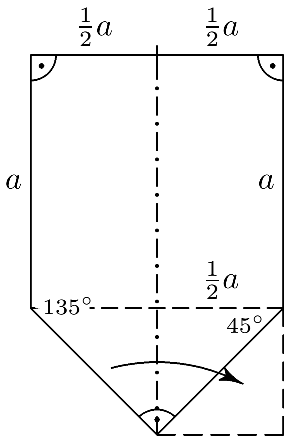
$$S = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 27 \quad \Rightarrow \quad a \doteq 4{,}65.$$

Tři shodné strany o velikosti 4,65 cm, dva úhly po 135°, zbylé dvě strany měří 3,3 cm.

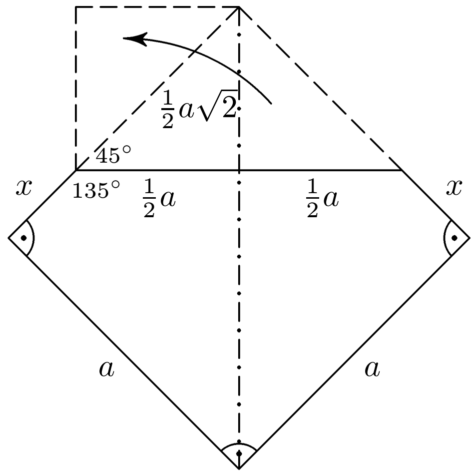
2. možnost (obr. 8)

$$S = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 27 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}\,a^2 = 27 \quad \Rightarrow \quad a = 6.$$

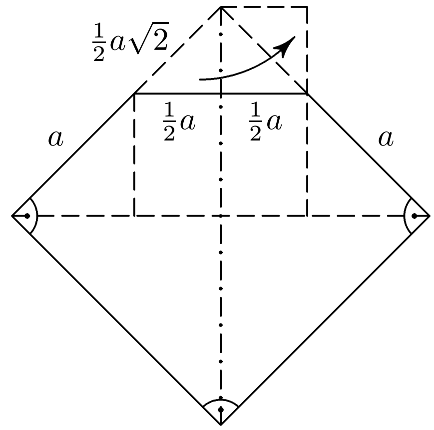
$$x = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}, \qquad x \doteq 1{,}8.$$



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

Tři shodné strany o velikosti 6 cm, dva úhly po 135°, zbylé dvě strany měří 1,8 cm.

3. možnost (obr. 9)

$$S = \left(a + \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 27 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{4} \cdot \left(5 + 4\sqrt{2}\right) = 27 \quad \Rightarrow \quad a \doteq 3{,}18.$$

Tři shodné strany o velikosti 3,18 cm, dva úhly po 135°, zbylé dvě strany měří 5,5 cm.

Odpověď: Úloha má tři řešení:

1) délka shodných stran je 4,65 cm; další vnitřní úhly měří 135°,
2) délka shodných stran je 6 cm; další vnitřní úhly měří 135°,
3) délka shodných stran je 3,18 cm; další vnitřní úhly měří 135°.

4. *Moje maminka se narodila 16. 3. 1948. Je to pěkné datum, platí totiž* $16 \cdot 3 = 48$. *Ve kterých letech 20. století bylo takových pěkných dat nejvíce?*

Řešení. Žáci budou odpověď hledat experimentálně. Budou vyšetřovat přednostně ta čísla, která mají co nejvíce dělitelů. Správná odpověď je, že nejvíc 7 „pěkných dat“ bylo v roce 1924 (24. 1., 12. 2., 8. 3., 6. 4., 4. 6., 3. 8., 2. 12.) K odpovědi mohou přidat i roky, kde bylo 6 „pěkných“ dat:

1912 (12. 1., 6. 2., 4. 3., 3. 4., 2. 6., 1. 12.),
1930 (30. 1., 15. 2., 10. 3., 6. 5., 5. 6., 3. 10.),
1936 (18. 2., 12. 3., 9. 4., 6. 6., 4. 9., 3. 12.),
1948 (24. 2., 16. 3., 12. 4., 8. 6., 6. 8., 4. 12.),
1960 (20. 3., 15. 4., 12. 5., 10. 6., 6. 10., 5. 12.),
1972 (24. 3., 18. 4., 12. 6., 9. 8., 8. 9., 6. 12.).

K odpovědi mohou žáci krom zkoumání (hraní si s čísly) dojít částečně i úvahami: Najdou-li pokusným zkoumáním, že např. rok 1920 má 5 „pěkných“ dat (20. 1., 10. 2., 5. 4., 4. 5., 2. 10.), mohou své odpovědi pak doplnit o určitá tvrzení, např.:

(T_1) Hledané roky nebudou mít jako poslední dvojčíslí prvočíslo p, neboť pak by měly nejvýše 2 „pěkná“ data (1. p., p. 1.).

(T_2) Hledané roky nebudou mít poslední dvojčíslí rovné součinu prvočísel pq, neboť by pak měly nejvýše 4 „pěkná“ data (pq. 1., p. q., q. p., 1. pq.).

Díky T_1 pak ze zkoumání vyloučí všechny roky, kde poslední dvojčíslí tvoří prvočíslo, tj. roky 1902, 1903, 1905, 1907, 1911, 1913, 1917, 1919, 1923, 1929, 1931, 1937, 1941, 1943, 1947, 1953, 1959, 1961, 1967, 1971, 1973, 1979, 1983, 1989, 1997 (25 možností). T_2 vyloučí součiny dvou prvočísel, které tvoří poslední dvojčíslí (menší než sto), tj.

$2 \cdot p \ldots$ vyřadí roky 1904, 1906, 1910, 1914, 1922, 1926, 1934, 1938, 1946, 1958, 1962, 1974, 1982, 1986, 1994

$3 \cdot p \ldots$ vyřadí roky 1909, 1915, 1921, 1933, 1939, 1951, 1957, 1969, 1987, 1993

$5 \cdot p \ldots$ vyřadí roky 1925, 1935, 1955, 1965, 1985, 1995

$7 \cdot p \ldots$ vyřadí roky 1949, 1977, 1991

Vyřadíme i roky 1901 (jen 1 „pěkné“ datum) a 2000. Tak je vyřazeno úvahou 61 čísel — zbývá jich k prozkoumání 39. Případně mohou žáci dojít i k tvrzení T_3 (výjimečně):

(T_3) Rovná-li se poslední dvojčíslí roku součinu tří prvočísel $a \cdot b \cdot c$ ($a \leqq b \leqq c$) a je-li $a = 2$ a zároveň $b \cdot c > 15$ nebo $a > 2$ a zároveň $b \cdot c > 12$, může mít takový rok maximálně 5 „pěkných“ dat (nemůže mít data 1. abc., abc. 1., a. bc., ale jen případně bc. a., b. ac., ac. b., c. ab., ab. c.) a vyloučíme je ze zkoumání, tj.:

pro $a = 2 \wedge b \cdot c > 15 \ldots$ vyřadí roky:

1944, 1952, 1968, 1976, 1992 (tvar $2 \cdot 2 \cdot p$)

1942, 1966, 1978 (tvar $2 \cdot 3 \cdot p$)

1950, 1970 (tvar $2 \cdot 5 \cdot p$)

1998 (tvar $2 \cdot 7 \cdot p$)

pro $a > 2 \wedge b \cdot c > 12 \ldots$ vyřadí roky:

1945, 1963, 1999 (tvar $3 \cdot 3 \cdot p$)

1975 (tvar $3 \cdot 5 \cdot p$)

tedy celkem ještě 15 roků. K prozkoumání zbyde 24 čísel.

Tabulka počtu „pěkných“ dat: (roky uvádíme posledním dvojčíslím a zapisujeme i důvod vyřazení ze zkoumání: p — jde o prvočíslo, s — součin dvou prvočísel, T — podle tvrzení T_3). V rámečku jsou roky, které po využití tvrzení T_1, T_2, T_3 zbývají ke zkoumání.

počet pěkných dat							
0	1	2	3	4	5	6	7
37 p	01	02 p	04 s	06 s	$\boxed{18}$	$\boxed{12}$	$\boxed{24}$
41 p	13 p	03 p	09 s	$\boxed{08}$	$\boxed{20}$	$\boxed{30}$	
43 p	17 p	05 p	14 s	10 s	$\boxed{40}$	$\boxed{36}$	
47 p	19 p	07 p	15 s	$\boxed{16}$	$\boxed{84}$	$\boxed{48}$	
53 p	23 p	11 p	21 s	$\boxed{28}$	$\boxed{90}$	$\boxed{60}$	
58 s	29 p	25 s	22 s	42 T		$\boxed{72}$	
59 p	31 p	26 s	$\boxed{27}$	$\boxed{54}$			
61 p	34 s	33 s	$\boxed{32}$	$\boxed{56}$			
62 s	38 s	35 s	44 T	$\boxed{80}$			
67 p	39 s	52 T	45 T	$\boxed{96}$			
71 p	46 s	55 s	50 T				
73 p	49 s	$\boxed{64}$	63				
74 s	51 s	75 T	66 T				
79 p	57 s	77 s	70 T				
82 s	65 s	78 T	$\boxed{81}$				
83 p	68 T	99 T	$\boxed{88}$				
86 s	69 s						
89 p	76 T						
94 s	85 s						
97 p	87 s						
00	91 s						
	92 T						
	93 s						
	95 s						
	98 T						

Poznámka: Porovnej s 1. příkladem kategorie Z6.

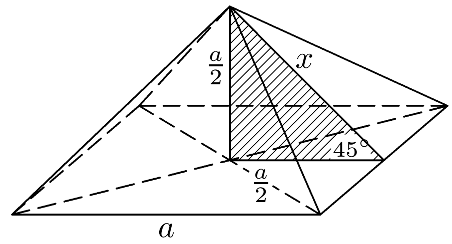
5. *Ke každé stěně krychle s hranou délky a jsme přilepili takový pravidelný čtyřboký jehlan, že vzniklo těleso s 12 stěnami. Kolik má toto těleso vrcholů? O kolik procent má slepené těleso větší objem než původní krychle?*

Řešení. Stěny přilepených jehlanů musí na sebe navazovat — proto stěna jehlanu musí svírat s podstavou úhel 45°.

Je zřejmé, že výška jehlanu je $\frac{1}{2}a$.

$$V_{\text{JEHLANU}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

Nové těleso má objem $V = a^3 + 6 \cdot \frac{1}{6}a^3 = 2a^3$, původní krychle má objem $V_{\text{KRYCHLE}} = a^3$. Objem se zvětšil o 100 %. Nad každou stěnou původní krychle přibyl jeden vrchol. Nové těleso má celkem 14 vrcholů (8 původních, 6 nových).



Obr. 10

Odpověď: Vzniklé těleso má 14 vrcholů a o 100 % větší objem.

Poznámka: Žáci mohou doplnit, že těleso má 12 stěn tvaru kosočtverce (o straně $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, úhlopříčky a, $a\sqrt{2}$), povrch je $6\sqrt{2}a^2$; hran je 24.

6. *Ostrov obrů má stejně obyvatel jako Ostrov trpaslíků. Ani na jednom z těchto ostrovů nežijí dvě stejně těžké bytosti a kromě dvou obrů a dvou trpaslíků má každý na svém ostrově dva kamarády, z nichž jeden je o 2 kg těžší a druhý o 2 kg lehčí. Dva nejtěžší trpaslíci váží dohromady tolik jako nejlehčí obr, tři „prostřední“ trpaslíci váží dohromady stejně jako prostřední obr a čtyři nejlehčí trpaslíci tolik co 8. nejtěžší obr. Zjistěte, kolik obyvatel má Ostrov trpaslíků a o kolik kilogramů je nejtěžší obr těžší než nejlehčí trpaslík.*

Řešení. 1. způsob — začneme od prostředního.

Obyvatel musí být lichý počet tj. $2k + 1$; $k + 1$ je prostřední (před ním je jich k, za ním též). Nechť prostřední trpaslík váží t (kg). „Prostřední“ obr váží jako tři „prostřední“ trpaslíci, tedy $(t - 2) + t + (t + 2) = 3t$, pak ale nejlehčí obr váží $3t - 2k$. Nejtěžší trpaslík váží $t + 2k$ a druhý nejtěžší trpaslík váží $t + 2k - 2$, oba dohromady váží $2t + 4k - 2$, což je stejně jako váží nejlehčí obr (odtud první rovnice)

$$2t + 4k - 2 = 3t - 2k.$$

Nejtěžší obr váží $3t + 2k$. Pak 8. nejtěžší obr musí vážit $3t + 2k - 14$. Nejlehčí trpaslík váží $t - 2k$, a čtyři nejlehčí trpaslíci váží dohromady $(t-2k)+(t-2k+2)+(t-2k+4)+ (t - 2k + 6) = 4t - 8k + 12$, což je právě tolik jako 8. nejtěžší obr. Odtud dostáváme druhou rovnici

$$4t - 8k + 12 = 3t + 2k - 14.$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned} 2t + 4k - 2 &= 3t - 2k, \\ 4t - 8k + 12 &= 3t + 2k - 14. \end{aligned}$$

Řešení soustavy je $k = 6$, $t = 34$. Nyní je už dokončení příkladu snadné. Obyvatel je $2 \cdot 6 + 1 = 13$; nejtěžší obr váží $3t + 2k = 102 + 12 = 114$, nejlehčí trpaslík váží $t - 2k = 34 - 12 = 22$ kg.

Odpověď: Na ostrově trpaslíků je 13 obyvatel a nejtěžší obr je o $114 - 22 = 92$ kg těžší než nejlehčí trpaslík.

Poznámka: Žáci si pro kontrolu mohou sestavit tabulku

pořadí podle hmotnosti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u trpaslíků	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
u obrů	90	92	94	96	98	100	102	104	106	108	110	112	114

2. ZPŮSOB — obvyklejší, ale zde asi složitější.

Všech obyvatel na každém z ostrovů je $n = 2k+1$; prostřední bude $(k+1)$-ní, tedy $k = \frac{n-1}{2}$, $k+1 = \frac{n+1}{2}$. Předpokládejme, že nejlehčí trpaslík váží t_1 a nejlehčí obr o_1. Pak „prostřední“ trpaslík váží $t_1 + 2(\frac{n+1}{2} - 1)$ a tři „prostřední“ trpaslíci váží dohromady

$$t_1 + 2\Big(\frac{n+1}{2} - 2\Big) + t_1 + 2\Big(\frac{n+1}{2} - 1\Big) + t_1 + 2\frac{n+1}{2};$$

což je tolik, co váží prostřední obr, $o_1 + 2(\frac{n+1}{2} - 1)$. Tak dostáváme první rovnici

$$3t_1 + 2n - 2 = o_1.$$

Dva nejtěžší trpaslíci váží jako nejlehčí obr (druhá rovnice)

$$t_1 + 2(n-2) + t_1 + 2(n-1) = o_1, \quad \text{tj.} \quad 2t_1 + 4n - 6 = o_1.$$

Čtyři nejlehčí trpaslíci váží tolik, co 8. nejtěžší obr (třetí rovnice)

$$t_1 + (t_1 + 2) + (t_1 + 4) + (t_1 + 6) = o_1 + 2(n-8), \quad \text{tj.} \quad 4t_1 - 2n + 28 = o_1.$$

(Vyřešením soustavy dostaneme hledaný výsledek.)