Z6–II–1

Martin se rozhodl utratit všechny svoje úspory za sladkosti. Zjistil, že si za ně může koupit tři větrníky a 3 dl kofoly nebo 18 dkg rozinek v jogurtu případně 12 dkg rozinek v jogurtu a půl litru kofoly. Nakonec si koupil jeden větrník a 6 dl kofoly. Na kolik gramů rozinek v jogurtu mu ještě zbylo? (*Bednářová*)

Řešení. Označme:

1 větrník	$\dots v$
1 decilitr kofoly	$\dots k$
1 dekagram rozinek	$\dots r$
hledané množství rozinek (v dekagramech)	$\dots x$

Vzhledem k tomu, že Martin chtěl utratit vždy všechny své úspory, můžeme symbolicky znázornit jednotlivé vztahy pomocí jednoduchých rovnic takto:

$$3v + 3k = 18r,$$
$$12r + 5k = v + 6k + xr$$

(Za sestavení soustavy 2 body)

První vztah znamená, že 3 větrníky a 3 decilitry kofoly mají stejnou hodnotu jako 18 dekagramů rozinek. Zde můžeme obě strany rovnice zmenšit třikrát, tj. dostaneme:

$$v + k = 6r.$$

Druhý vztah znamená, že 12 dekagramů rozinek a 5 decilitrů kofoly (tj. půl litru) mají stejnou hodnotu jako 1 větrník, 6 decilitrů kofoly a neznámé množství rozinek x. Zde můžeme upravit rovnici odečtením $5k$ od obou stran, tj.

$$12r = v + k + xr.$$

Napíšeme-li oba upravené vztahy pod sebe, dostaneme:

$$v + k = 6r,$$
$$12r = v + k + xr.$$

Nyní dosadíme první rovnici do druhé a získáme rovnici:

$$12r = 6r + xr.$$

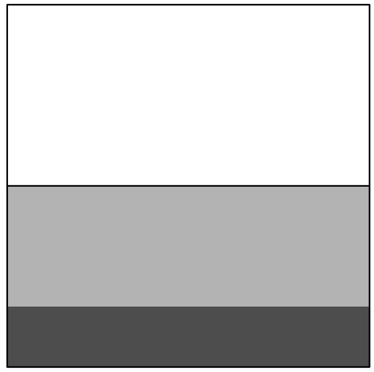
Abychom získali rovnost, musí být $x = 6$ dekagramů rozinek, což je 60 gramů.

Martinovi tedy zbyly peníze na koupení 60 gramů rozinek v jogurtu.

(Úplné řešení 6 bodů)

Z6–II–2

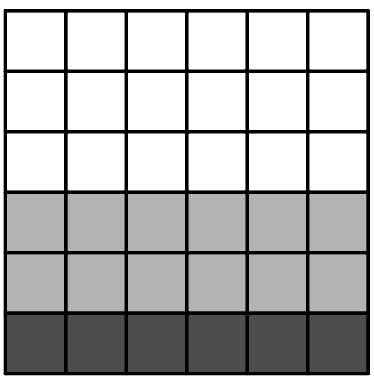
Katka rozstřihla čtvercový šátek nakreslený na obrázku podél úhlopříčky a dostala dva trojúhelníkové šátky. Zjistěte jaká část na každém z nových šátků je bílá, černá a šedá. Na původním šátku byla černá $\frac{1}{6}$ a šedá $\frac{1}{3}$ jeho plochy. (*Bednářová*)



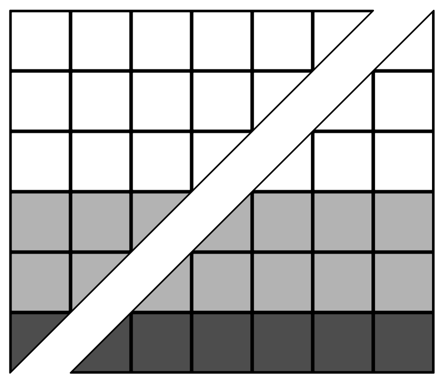
Obr. 1

Řešení. Na obrázku 1 je nakreslen Katčin šátek.

Pro lepší orientaci nakreslíme čtvercový šátek do čtvercové sítě. Vzhledem k podílu $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{3}$ je vhodné použít čtverec o straně 6 jednotek (obr. 2). Po rozstřihnutí získáme dva stejně velké trojúhelníkové šátky, ale s jinými barevnými podíly. V jednom trojúhelníkovém šátku je celkem 18 čtverců o straně 1, tj. 36 malých trojúhelníčků (obr. 3.)



Obr. 2



Obr. 3

První trojúhelníkový šátek:
bílá část: 27 trojúhelníčků $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$,
šedá část: 8 trojúhelníčků $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$,
černá část: 1 trojúhelníček $\frac{1}{36}$.
(3 body)
Druhý trojúhelníkový šátek:
bílá část: 9 trojúhelníků $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$,
šedá část: 16 trojúhelníků $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$,
černá část: 11 trojúhelníků $\frac{11}{36}$.
(Za úplné řešení 6 bodů)

Z6–II–3

Moje oblíbená čísla jsou ta, která se po vynásobení svým vlastním ciferným součtem desetkrát zvětší. Součin tří mých oblíbených čísel je 71 668. Která jsou to čísla.

(*Ptáčková*)

Řešení. Oblíbené číslo je takové, které se po vynásobení svým ciferným součtem zvětší desetkrát. To znamená, že ciferný součet oblíbeného čísla musí být 10. Např. číslo 73 má ciferný součet 10, pak $73 \cdot 10 = 730$. Rozložíme číslo 71 668 na součin prvočinitelů:

$$71\,668 = 2 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 41.$$

(Za rozklad 2 body)

Z nich jen číslo 19 má ciferný součet 10. Čísla 2, 23 a 41 nejsou oblíbená, ale jejich vhodným vynásobením lze získat také čísla s ciferným součtem 10. Vynásobíme proto $2 \cdot 23 = 46$ a $2 \cdot 41 = 82$, čímž dostaneme hledaná čísla.

Násobila jsem tedy čísla 19, 46 a 82.

(Za úplné řešení 6 bodů)

Z7–II–1

Bonboniéra s krabicí ve tvaru kvádru byla plná bonbónů složených do řádků a sloupců. Míša jich několik snědl a ty, co zbyly, přerovnal tak, že zaplnily (bez mezer) až na jedno místo tři celé řádky. Zbylé bonbóny z dalšího neúplného řádku snědl. Pak zbylé bonbóny přerovnal a zaplnil jimi bez jednoho místa pět sloupců. Bonbóny v neúplném sloupci opět snědl. Tak zůstala v bonboniéře pouze třetina z původního počtu bonbónů. Zjistěte:

a) kolik bonbónů měla celá bonboniéra,
b) kolik bonbónů snědl Míša předtím než prováděl první přerovnání. (*Bednářová*)

Řešení. Vzhledem k tomu, že nakonec zůstaly zaplněny čtyři sloupce, a to byla pouze třetina z původního počtu bonbónů, musí bonboniéra obsahovat 12 sloupců. (1 bod)

Nyní tedy víme, že v každém řádku je 12 bonbónů. Nyní je tedy zřejmé, že před druhým přerovnáním bylo v krabici 24 bonbónů. (1 bod)

Protože jeden chyběl do plných pěti sloupců je jasné, že v pěti sloupcích je $24 + 1 = 25$ bonbónů, tedy jeden sloupec má 5 bonbónů. Plná krabice má tedy $12 \cdot 5 = 60$ bonbónů. (2 body)

Poněvadž před prvním přerovnáním chyběl jeden bonbón do tří celých řad, bylo v té době v krabici 35 bonbónů, neboli jich Míša snědl $60 - 35 = 25$.

Celá bonboniéra má 60 bonbónů a před prvním přerovnáním jich Míša snědl 25.

(Úplné řešení 6 bodů)

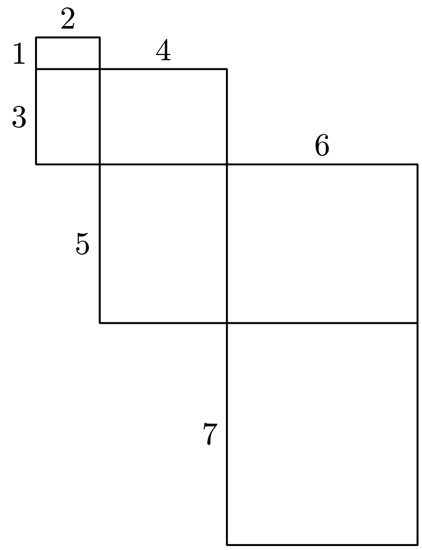
Z7–II–2

Katka si z papíru vystřihla 20 obdélníků. První z nich měl rozměry $1\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$, druhý $2\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$, třetí $3\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$ atd. Pak je začala skládat stejně dlouhými stranami k sobě tak, aby se nepřekrývaly a žádný obdélník se nedotýkal více než dvou jiných obdélníků.

a) Narýsuj mnohoúhelník, který Katka složila z prvních šesti svých obdélníků.
b) Zjisti obvod Katčina mnohoúhelníku složeného ze všech vystříhnutých obdélníků.

(*Duda*)

Řešení. a) Řešení je na obr. 1. (2 body)



Obr. 1

b) Pro obvod Katčina mnohoúhelníka platí:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + 2 \cdot 21 =$$
$$= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 21) = 462.$$

Obvod Katčina mnohoúhelníka je 462 cm.

(Úplné řešení 6 bodů)

Z7–II–3

Paní učitelka dala dětem za domácí úkol vypočítat dva příklady na násobení celých záporných čísel. Ondra si je oba napsal bez závorek a doma si pak myslel, že jsou to příklady na odčítání (tečky si nevšimnul). Takto pozměněné příklady správně vypočítal. Jeden z jeho výsledků se od „správného" lišil ve znaménku, druhý byl -182 násobkem jeho převrácené hodnoty. Jaké příklady dostal Ondra za domácí úkol? (*Bednářová*)

Řešení. 1. Zabývejme se nejprve první dvojicí čísel. Označme a, b kladná celá čísla. Ondra měl počítat příklad $(-a) \cdot (-b)$, ale počítal $-a - b$. Víme, že platí:

$$-a - b = -ab,$$

což je ekvivalentní se vztahem

$$a + b = ab.$$

Vzhledem k tomu, že a, b jsou celá kladná čísla, dostáváme jediné řešení $a = 2$, $b = 2$.

2. Druhá dvojice čísel splňuje vztah

$$ab = (-182) \cdot \frac{1}{-a - b},$$
$$ab = 182 \cdot \frac{1}{a + b}.$$

Po úpravě a rozložení 182 na součin prvočísel dostáváme

$$ab(a+b) = 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13.$$

Vzhledem k symetrii čísel a, b můžeme předpokládat, že $a \leqq b$ a systematicky vyšetříme všechny možnosti uvedeného rozkladu:

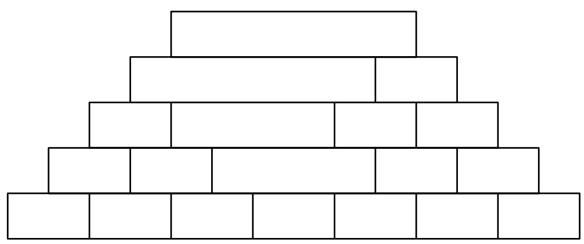
$a = 1$	$b = 2$	$a + b = 3$	nevyhovuje
$a = 1$	$b = 7$	$a + b = 8$	nevyhovuje
$a = 1$	$b = 13$	$a + b = 14 = 2 \cdot 7$	VYHOVUJE
$a = 1$	$b = 2 \cdot 7$	$a + b = 15$	nevyhovuje
$a = 2$	$b = 7$	$a + b = 9$	nevyhovuje
$a = 2$	$b = 13$	$a + b = 15$	nevyhovuje
$a = 7$	$b = 13$	$a + b = 20$	nevyhovuje

Z tabulky a ze symetrie plyne, že Ondra mohl dostat spočítat buď $(-1) \cdot (-13)$, nebo $(-13) \cdot (-1)$.

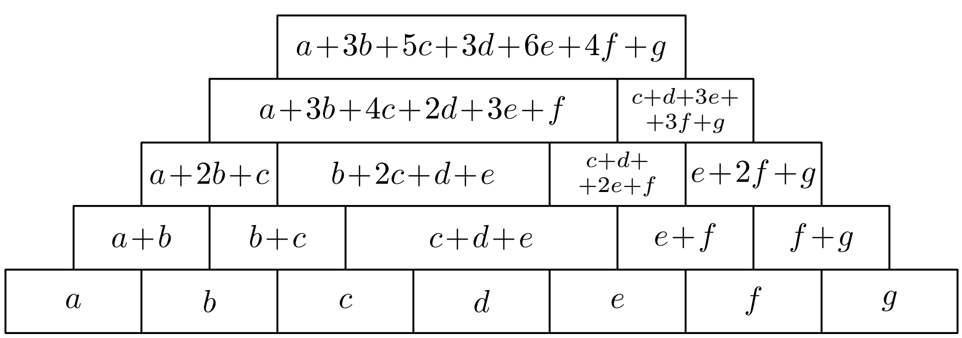
(Úplné řešení 6 bodů)

Z8–II–1

Do spodního řádku této divné sčítací pyramidy doplňte čísla 1, 1, 2, 2, 3, 3 a 4 tak, aby nahoře vzniklo co největší číslo. (*Bednářová*)



Řešení. Napišme do spodního řádku pyramidy postupně čísla a, b, c, d, e, f, g a vyplňme celou pyramidu. Pak dostaneme:



Hledáme tedy maximum výrazu

$$a + 3b + 5c + 3d + 6e + 4f + g,$$

kde za neznámé dosazujeme čísla 1, 1, 2, 2, 3, 3 a 4. Odtud plyne, že maximální hodnota nastane pro $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 4$, $f = 3$, $g = 1$.

Spodní patro pyramidy má tvar

1	2	3	2	4	3	1

Nejvyšší možná hodnota v horním řádku je tedy 65.

(Za úplné řešení 6 bodů)

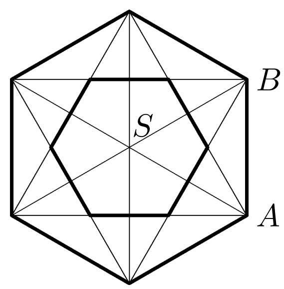
Z8–II–2

V pravidelném šestiúhelníku s obsahem $144\,\mathrm{cm}^2$ jsme vyznačili všechny jeho úhlopříčky. Šestiúhelník se nám tak „rozpadnul“ na několik trojúhelníků a čtyřúhelníků.

a) Zjistěte, na kolik částí ho úhlopříčky rozdělily.

b) Určete obsah pravidelného šestiúhelníka, který vznikne složením všech čtyřúhelníkových částí daného šestiúhelníka. (*Bednářová*)

Řešení. Nejdříve si celou situaci nakreslíme.

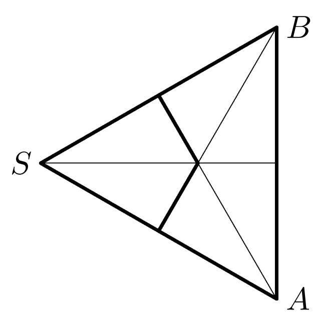


Obr. 1

Z prvního obrázku je patrné, že se šestiúhelník skládá z šesti trojúhelníků podobných trojúhelníku SAB.

a) Vzhledem k tomu, že trojúhelník SAB se skládá ze 4 částí, vidíme, že úhlopříčky rozdělily šestiúhelník na 24 částí (3 body).

b)



Obr. 2

Z obrázku 2 vyplývá, že trojúhelník SAB lze rozdělit na 6 shodných trojúhelníčků. Protože dva z nich jsou součástí šestiúhelníka, jehož obsah máme určit, vidíme že obsah menšího šestiúhelníka je třikrát menší než obsah původního šestiúhelníka. Odtud již snadno dostaneme, že hledaného šestiúhelníka je $144 : 3 = 48\,\mathrm{cm}^2$.

(Za úplné řešení 6 bodů)

Z8–II–3

U ohně seděli náčelníci tří indiánských kmenů se třemi stejnými dýmkami. Měli válečnou poradu a kouřili. První z nich vykouří celou dýmku za deset minut, druhý za půl hodiny a třetí za hodinu. Jak si mají náčelníci mezi sebou měnit dýmky, aby se mohli radit co nejdéle. (*Bednářová*)

Řešení. 1. způsob

1. náčelník	... 10 minut
2. náčelník	... 30 minut
3. náčelník	... 60 minut

Dýmku si předají po x minutách, tedy celková délka porady je $3x$ minut. Pak platí:

$$\begin{aligned} \frac{x}{10}+\frac{x}{30}+\frac{x}{60}&=1,\\ x\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right)&=1,\\ x\cdot\frac{6+2+1}{60}&=1,\\ x&=\frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Celková doba porady je $3x=3\cdot\frac{20}{3}=20$ minut.

2. způsob. Uvažujme, že se náčelníci chtějí radit 60 minut. Pak první za tuto dobu vykouří 6 dýmek, druhý 2 a třetí 1. Dohromady potřebují 9 dýmek. Vzhledem k tomu, že ve skutečnosti mají jen 3, musí jejich porada trvat pouze 20 minut.

(Úplné řešení 6 bodů)