Z9–III–1

Skupinka dětí si zorganizovala piškvorkový turnaj. Každý hrál s každým a celkem odehráli 136 zápasů. Z toho právě 66 zápasů bylo typu dívka-dívka nebo chlapec-chlapec. Kolik bylo ve skupině chlapců a kolik dívek? (*Bednářová*)

Řešení. Uvažujme skupinu n hráčů. Každý s každým sehraje jedno utkání a nás zajímá celkový počet zápasů. Každý hráč bude hrát s $n-1$ soupeři, hráčů je n, tedy dohromady $n \cdot (n-1)$. Nyní si musíme uvědomit, že jsme každé utkání započítali dvakrát. Tedy jsme dokázali, že celkový počet všech zápasů ve skupině n hráčů je $\frac{1}{2}n \cdot (n-1)$.

Vytvoříme tabulku, ze které již snadno určíme řešení.

počet hráčů n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
počet zápasů	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136

Z tabulky je zřejmé, že celkem bylo ve skupině 17 dětí. Nyní už snadno dopočítáme řešení — buď bylo 7 chlapců a 10 dívek, nebo 10 chlapců a 7 dívek.

Z9–III–2

Ve Squarelandu žijí pouze čtverce. Až na dvě výjimky tam každý z nich má dva přátele, z nichž jeden má obvod o 8 cm menší a druhý o 8 cm větší. Průměrný obsah squarelandského čtverce je $116\,\mathrm{cm}^2$. Žádné dva čtverce nejsou shodné a obvod nejmenšího čtverce je roven délce strany největšího čtverce. Zjistěte:

a) počet obyvatel ve Squarelandu,
b) rozměry největšího a nejmenšího squarelandského čtverce,
c) průměrnou délku „Squarelanďana“. (*Bednářová*)

Řešení. Označme a délku strany nejmenšího ze čtverců. Pak délky stran uvažovaných čtverců můžeme označit

$$a,\ a+2,\ a+4,\ \ldots,\ a+2t.$$

Vzhledem k podmínce

$$4 \cdot a = a + 2t,$$

dostáváme

$$3a = 2t,$$

neboli a je sudé.

1. $a = 2$. Vypočítáme průměrný obsah (musí být $116\,\mathrm{cm}^2$).

$$\frac{2^2+4^2+6^2+8^2}{4} \neq 116\,\mathrm{cm}^2.$$

2. $a = 4$. Vypočítáme průměrný obsah (musí být $116\,\mathrm{cm}^2$).

$$\frac{4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+14^2+16^2}{4} = 116\,\mathrm{cm}^2.$$

3. $a = 6$. Vypočítáme průměrný obsah (musí být $116\,\mathrm{cm}^2$).

$$\frac{6^2 + 8^2 + \cdots + 22^2 + 24^2}{4} = 258\,\mathrm{cm}^2.$$

Se zvětšujícím se a roste i průměrný obsah.

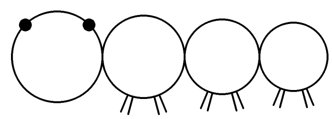
Na ostrově žije 7 obyvatel. Strana nejmenšího z nich měří 4 cm, největšího 16 cm a průměrná délka strany je 10 cm.

Z9–III–3

Na svých toulkách přírodou narazil profesor Hmyzík na nový druh brouka. Podle počtu jeho nožiček a tvaru jednotlivých článků ho nazval *Kuličkovec dvanáctinožkový*: každý článek tohoto brouka má tvar kuličky a z každého článku kromě prvního (hlavičky) vyrůstají dva páry nožiček. Navíc každý z článků má o 21 % větší průřez než článek za ním. Zjistěte přesnou délku brouka, pokud víte, že hlavička má poloměr 0,266 2 cm.

(*Bednářová*)

Řešení. Příklad takového živočicha je na obrázku.



Hlavička: poloměr $r_H = 0{,}266\,2\,\mathrm{cm}$, tedy průměr je $d_H = 0{,}532\,4\,\mathrm{cm}$.

Vypočítejme ještě plochu průřezu hlavičky:

$$S_H = \pi r_H^2 = 0,222\,51\,\mathrm{cm}^2.$$

První článek:

$$S_1 = \frac{S_H}{1,21} = 0{,}183\,890\,96\,\mathrm{cm}^2,$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} = 0{,}242\,\mathrm{cm}^2, \quad d_1 = 0{,}484\,\mathrm{cm}.$$

Druhý článek:

$$S_2 = \frac{S_1}{1,21} = 0{,}151\,976\,\mathrm{cm}^2,$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = 0{,}22\,\mathrm{cm}^2, \quad d_2 = 0{,}44\,\mathrm{cm}.$$

Třetí článek:

$$S_3 = \frac{S_2}{1,21} = 0{,}125\,6\,\mathrm{cm}^2,$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{S_3}{\pi}} = 0{,}2\,\mathrm{cm}, \quad d_3 = 0{,}4\,\mathrm{cm}.$$

Celkovou délku d vypočteme jako součet délek jednotlivých článků:

$$d = d_H + d_1 + d_2 + d_3 = 0{,}5324 + 0{,}484 + 0{,}44 + 0{,}4 = 1{,}856\,4\,\mathrm{cm}.$$

Kuličkovec dvanáctinožkový měří 1,856 4 cm.

Z9–III–4

Marta třídí trojúhelníky, jejichž strany vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla, na *vysoké, nízké* a ostatní. *Vysoký* trojúhelník je takový pro který platí, že součet délek některých dvou stran rovná čtyřnásobku délky třetí strany. Nízký trojúhelník je takový v němž je součin délek některých jeho dvou stran dvojnásobkem délky třetí strany. Najděte

a) všechny vysoké trojúhelníky, jejichž jedna strana měří 6 cm,
b) všechny nízké trojúhelníky, jejichž jedna strana měří 6 cm,
c) všechny trojúhelníky, jejichž jedna strana měří 4 cm a jsou vysoké a nízké současně.

(*Dillingerová*)

Řešení. a) Hledáme vysoké trojúhelníky ($a + b = 4c$) se stranou 6 cm.

- $a = 6$ cm.
  Pak platí:

$$6 + b = 4c.$$

K řešení můžeme použít tabulku (v posledním řádku vždy ověříme platnost trojúhelníkové nerovnosti)

a	6	6	6	6	...
c	2	3	4	5	...
b	2	6	10	14	...
výsledek	NE	ANO	NE	NE	NE

- $c = 6$ cm.
  Pak platí:

$$a + b = 4 \cdot 6 = 24.$$

K řešení můžeme použít tabulku (v posledním řádku vždy ověříme platnost trojúhelníkové nerovnosti)

a	12	11	10	9	...
b	12	13	14	15	...
c	6	6	6	6	...
výsledek	ANO	ANO	ANO	NE	NE

b) Hledáme nízké trojúhelníky ($a \cdot b = 2c$) se stranou 6 cm.

- $a = 6$ cm.
  Pak platí:

$$6b = 2c, \text{ tj. } 3b = c.$$

K řešení můžeme použít tabulku (v posledním řádku vždy ověříme platnost trojúhelníkové nerovnosti)

a	6	6	6	6	...
b	1	2	3	4	...
c	3	6	9	12	...
výsledek	NE	ANO	NE	NE	NE

- $c = 6$ cm.
  Pak platí:
$$a \cdot b = 12.$$

K řešení můžeme použít tabulku (v posledním řádku vždy ověříme platnost trojúhelníkové nerovnosti)

a	1	2	3
b	12	6	4
c	6	6	6
výsledek	NE	ANO	ANO

c) Hledáme všechny trojúhelníky, jejichž jedna strana měří 4 cm a jsou vysoké a nízké současně.

1. $a + b = 4c, \quad a \cdot b = 2c.$

- $a = 4$ cm.
  Pak platí:
$$4 + b = 4c, \quad 4b = 2c,$$

což nemá celočíselné řešení.

- $c = 4$ cm.
  Pak platí:
$$a + b = 16, \quad a \cdot b = 8,$$

což nemá celočíselné řešení.

2. $a + b = 4c$, $a \cdot c = 2b$.

- $a = 4$ cm.
  Pak platí:
$$4 + b = 4c, \quad 4c = 2b,$$

což dává řešení $b = 4$ cm, $c = 2$ cm.

- $c = 4$ cm.
  Pak platí:
$$a + b = 16, \quad 4a = 2b,$$

což nemá celočíselné řešení.