MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

52. ROČNÍK, 2002/2003

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v závislosti na soutěžních kategoriích probíhá v jednom, ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má domácí, okresní a oblastní kolo.
Kategorie Z8, Z7 a Z6 mají domácí a okresní kolo.
Kategorie Z5 má domácí a školní kolo.

I. kolo (domácí): Pro všechny kategorie se I. kolo organizuje na školách. Žáci v něm řeší šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **4. listopadu 2002** a druhou trojici úloh do **3. ledna 2003**.

Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **3. prosince 2002** a druhou trojici úloh do **2. března 2003**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje.* Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli I. kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresnímu výboru MO. Ten z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti ve II. kole soutěže. Výběr účastníků II. školního kola v kategorii Z5 provádí po dohodě s okresním výborem MO pořádající škola.

II. kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **29. ledna 2003**,
pro kategorii Z6 až Z8 **9. dubna 2003**,
pro kategorii Z5 **29. ledna 2003**.

II. kolo pro kategorie Z6 až Z9 je okresní a pořádá se zpravidla v okresním městě. II. kolo pro kategorii Z5 je školní a probíhá na pořádající škole.

Pozvaní žáci kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 1 hodiny.

III. kolo se pořádá pro kategorii Z9 a koná se **19. března 2003** v některém městě vaší oblasti. Pravidla soutěže jsou stejná jako pro II. kolo. Nejlepší účastníci III. kola jsou vyhlášeni jeho vítězi. Jejich jména budou uvedena v ročence 52. ročníku matematické olympiády na základních školách, kterou vydá ústřední výbor MO po skončení soutěže, a na internetu.

MO pořádají *ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední výbor MO* a v oblastech ji řídí *oblastní* *výbory MO* a pobočky JČMF. Na jednotlivých školách ji zajišťují učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2002/2003
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Informace o MO a zadání úloh najdete též na internetu

`http://home.pf.jcu.cz/~mo`

Na ukázku uvedeme **řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:**

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1) \cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

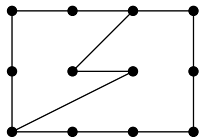
Doplňte do tabulky přirozená čísla tak, aby v každém jejím bílém políčku byl součin příslušných čísel z jejího šedého záhlaví. (*Bednářová*)

		b		
a		$a \cdot b$		

	6	3		
		12		
		9	72	
			56	49

Z5–I–2

Na obrázku je znázorněn pětiúhelník a šestiúhelník s vrcholy v mřížových bodech čtvercové sítě. Urči obsah šestiúhelníka, víš-li, že pětiúhelník má obsah 7,5 cm^2. (*Bednářová*)



Z5–I–3

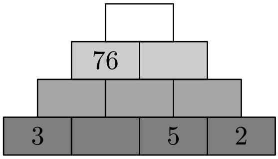
Nevill opět zapomněl heslo pro vstup do věže. Profesorka McGonagallová mu však prozradila, že:

– heslo se skládá ze tří různých písmen,
– dobře se vyslovuje, protože v něm nejsou dvě souhlásky vedle sebe,
– všechna písmena hesla najdete ve jméně vedoucího učitele Slizolinu – „Snape“.

Po vyzkoušení třetiny všech hesel, vyhovujících těmto podmínkám, se vstup do věže otevřel. Kolik hesel Nevill vyzkoušel? (*Bednářová*)

Z5–I–4

Doplň do obrázku čísla tak, aby na každé cihličce byl napsán součet všech čísel z tmavších cihliček, než je ona. (*Bednářová*)

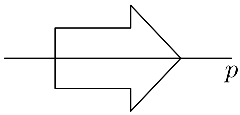


Z5–I–5

Míša měl včera o 15 samolepek víc než Pavel. Dnes však ale 17 svých vyměnil za 9 Pavlových a dalších 7 vyměnil za 13 Oldových. Pavel kromě těch devíti, které vyměnil za 17 Míšových, vyměnil ještě 11 svých za 6 Láďových. Který z chlapců má teď víc samolepek, Míša nebo Pavel? O kolik? (*Bednářová*)

Z5–I–6

O mnohoúhelníku načrtnutém na obrázku víme, že jej přímka p přesně dělí na dvě shodné části. Jeho strany měří 3 cm, 4 cm, 5 cm a 6 cm. Jaký obvod může mít tento mnohoúhelník? (*Bednářová*)



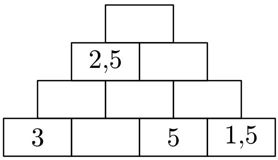
KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Sněhurka připravuje svých 7 trpaslíků na přijímací zkoušky na SŠPT (Střední škola pro trpaslíky). V prvním cvičném diktátě udělali trpaslíci průměrně 35 chyb. Ve druhém udělal Štístko o 15 chyb méně než v prvním, Dřímal se zhoršil o 13 a Šmudla o 2 chyby. Kejchal se zlepšil o 9 a Prófa dokonce o 19 chyb. Zbylí dva trpaslíci udělali ve druhém diktátě stejný počet chyb jako v prvním. Kolik průměrně udělali trpaslíci chyb ve druhém diktátě? (*Bednářová*)

Z6–I–2

Doplň do obrázku chybějící čísla tak, aby byl na každé cihličce (kromě těch v nejspodnější vrstvě) napsaný aritmetický průměr čísel ze dvou cihliček pod ní umístěných. (*Bednářová*)



Z6–I–3

Boris sestavil ze 32 zápalek obdélník (nikoliv čtverec). Jeho sestra vložila do obdélníku několik zápalek a tak ho rozdělila přesně na 7 čtverců. Kolik zápalek mohly měřit strany Borisova obdélníku? Všechny zápalky byly stejně dlouhé a žádnou nelámali. (*Ptáčková*)

Z6–I–4

Od té doby, co si Novákovi koupili štěňátka Punťu a Alíka, chodili každý den na jednu procházku. Někdy s sebou vzali Punťu, někdy Alíka, ale nikdy oba pejsky zároveň. Na osmnácti procházkách s sebou nějakého pejska měli. Punťa zůstal doma čtrnáctkrát, Alík šestnáctkrát. Jak dlouho mají Novákovi Punťu a Alíka? (*Bednářová*)

Z6–I–5

Finále podzimní soutěže o nejkrásnějšího draka se zúčastnili Adam, Barča a Zuzka. Každý z 22 porotců přidělil finalistům 1, 2 nebo 3 body — každému jiný počet. Tři body získal soutěžící za první místo, 2 body za druhé místo a 1 bod za třetí místo. Adam získal stejně prvních a třetích míst. Druhých míst měl o čtyři více než prvních. Barča a Zuzka získaly stejně prvních míst, avšak druhých míst měla Barča dvakrát více než Zuzka. Kdo vyhrál finále? Kolik získal bodů? (*Majer*)

Z6–I–6

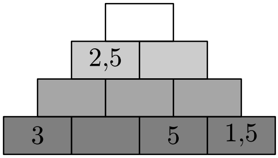
Kuba měl v krabici 100 stejně velkých dřevěných krychliček o hraně 1 dm. Z některých z nich sestavil velkou krychli a pět z jejích stěn obarvil na červeno. Pak tuto krychli zboural a ze všech krychliček, z nichž byla vytvořená, postavil kvádr. I tento kvádr měl právě pět svých stěn obarvených načerveno. Jaké rozměry měla velká krychle a jaké kvádr?

(*Hozová*)

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Doplň do obrázku čísla tak, aby na každé cihličce, která není ve spodní vrstvě, byl napsaný aritmetický průměr všech čísel z tmavších cihliček, než je ona. (*Bednářová*)



Z7–I–2

Zuzka, Martin, Jakub a Petra hráli kuličky. Když hra skončila, měla Zuzka o 4 kuličky méně než byla polovina všech kuliček, Martin měl pětinu všech kuliček a ještě 6 navíc, Jakub třikrát méně než Zuzka a Petra o jednu kuličku méně než Jakub. Které z dětí mělo na konci hry nejméně a které nejvíce kuliček? (*Bednářová*)

Z7–I–3

V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ o straně délky 5 cm označme M průsečík úseček AC, BD. Vypočítej velikost úsečky AM a velikost úhlu AMB. (*Bednářová*)

Z7–I–4

Určete nejmenší přirozené číslo n, pro něž je součin

$$\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n - \frac{1}{n}\right),$$

dělitelný stem. (*Ptáčková*)

Z7–I–5

Rozděl rovnostranný trojúhelník na čtyři shodné útvary. Jeden z nich odeber a zbytek opět rozděl na čtyři shodné útvary. Najdi alespoň jedno řešení a narýsuj je. (*Hozová*)

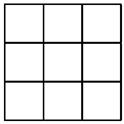
Z7–I–6

V době dovolené paní Veselé patnáctkrát pršelo, ale nikdy ne celý den. Když pršelo dopoledne, bylo odpoledne jasno. Pršelo-li odpoledne, bylo v tomto dni dopoledne jasno. Jasno bylo 9 dopolední a 8 odpolední. Jak dlouho trvala dovolená paní Veselé? (*Bednářová*)

KATEGORIE Z8

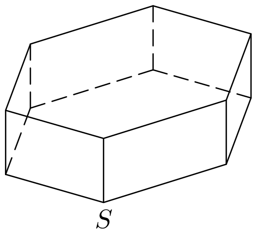
Z8–I–1

Do tabulky na obrázku vepište navzájem různá přirozená čísla tak, aby součin čísel v každém řádku, každém sloupci i na obou úhlopříčkách byl 1 000 a součet čísel v prvním řádku a prvním sloupci byl co největší. (*Tlustý*)



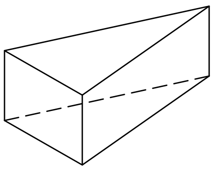
Z8–I–2

Mravenec obíhá rychlostí 1 cm za 4 sekundy po dráze tvaru pravidelného šestiúhelníku se stranou délky 1 cm okolo matice znázorněné na obrázku. Jak daleko od místa, ze kterého vystartoval (bod S), bude za dvě a čtvrt minuty? (*Bednářová*)



Z8–I–3

Na obrázku je nakreslený trojboký hranol. Kolik existuje trojúhelníků, jejichž strany jsou hranami nebo úhlopříčkami stěn hranolu? (*Dillingerová*)



Z8–I–4

Na matematickém táboře se 80 dětí rozdělilo do pěti skupin. Vedoucí však nebyl spokojen a požádal, aby pětina dětí z první skupiny přešla do druhé. Ani pak se mu rozdělení nelíbilo a chtěl, aby pětina dětí přešla ze druhé skupiny do třetí. Potom ještě pětina ze třetí skupiny musela přejít do čtvrté. Pak žádal, aby pětina členů čtvrté skupiny přešla do páté a konečně pětina z páté skupiny se přidala k první. Tak vznikly stejně početné skupiny. Jaké bylo původní rozdělení dětí? (*Volfová*)

Z8–I–5

Slečna Vectorová dala Hermioně tuto úlohu: „Narodila jsem se v den, jehož datum zapsané bez teček je současně pořadovým číslem tohoto dne v roce (např. 14. 1. dá číslo 141, ale je to jen 14. den v roce). Když vynásobíte den a měsíc mých narozenin, dostanete můj věk v roce 2201.“ Vypočítejte, kdy se slečna Vectorová narodila. (*převzatá úloha*)

Z8–I–6

Radka ráda posílá z mobilu textové zprávy (dále jen SMS). Každý den pošle tři. Zaslání jedné stojí 2,50 Kč. Po zaslání určitého počtu SMS má možnost vybrat si právě jednu z následujících prémií:

- po 10 poslaných SMS lze poslat 1 SMS zdarma,
- po 100 poslaných SMS lze poslat 10 SMS zdarma,
- po 1000 poslaných SMS lze poslat 100 SMS zdarma.

Kolik nejméně zaplatí za odeslané SMS za jeden rok od první odeslané zprávy? (*Bálintová*)

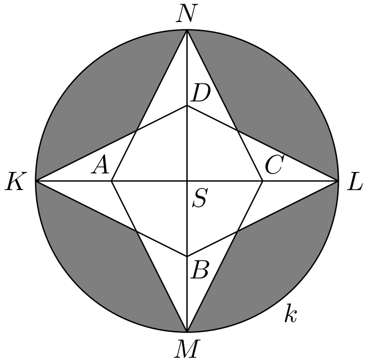
Z9–I–1

Nahraďte hvězdičky v čísle $683{*}{*}{*}$ vhodnými číslicemi tak, aby výsledné šestimístné číslo bylo dělitelné 7, 8 a 9. (*Tlustý*)

Z9–I–2

Vypočítejte obsah šedé plochy vyznačené na obrázku, pokud víte, že KL a MN jsou dva navzájem kolmé průměry kružnice $k(S, 6\,\mathrm{cm})$ a body A, B, C a D jsou po řadě středy úseček KS, MS, LS a NS.

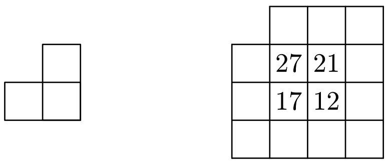
(*Bednářová*)



Z9–I–3

Do tabulky na obrázku byla doplněna čísla tak, že součet trojice v každém „trojčtverečku“ (bez otáčení) byl stejný. Určete součet čísel v tabulce.

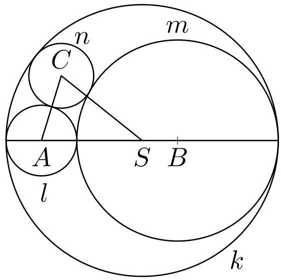
(*Dillingerová*)



Z9–I–4

Na průměru kružnice $k(S, r)$ leží středy dvou kružnic $l(A, r_1)$ a $m(B, r_2)$, které se vzájemně vně dotýkají a dotýkají se i kružnice k. Navíc uvnitř kružnice k leží ještě kružnice $n(C, r_3)$, která se dotýká kružnic k, l a m

(obr.). Světlana si myslí, že obvod trojúhelníku ASC je větší než průměr kružnice k. Má pravdu? Proč? (*Volfová*)



Z9–I–5

Průměrný věk žáka naší školy je 10 let, průměrný věk učitelů je 54 let, průměrný věk žáků a učitelů dohromady je 12 let. Určete průměrný počet žáků ve třídě této školy, pokud víte, že učitelé učí průměrně 21 hodin týdně a děti mají v průměru 24 vyučovacích hodin týdně. (*Bednářová*)

Z9–I–6

Martin chodí ze školy obvykle pěšky. Pokud jede na kole, jeho průměrná rychlost zvýší o 10 km/h a doba, kterou mu trvá cesta, se zkrátí o 15 minut. Přijede-li pro něj otec autem, průměrná rychlost se zvýší šestkrát a čas se zkrátí o 20 minut. Jak daleko to má Martin do školy (trasa do školy je ve všech případech stejná)? (*Dillingerová*)

ÚSTŘEDNÍ VÝBOR MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

52. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Leták pro kategorie Z 5 – Z 9
Vydala Jednota českých matematiků a fyziků
pro vnitřní potřebu ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR
v 1. vydání
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák