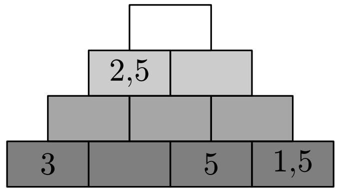
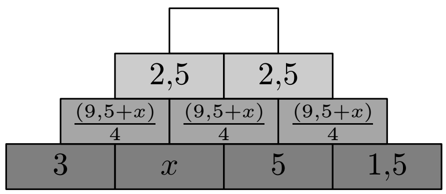
52. ročník Matematické olympiády

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z7

1. *Doplň do obrázku čísla tak, aby na každé cihličce, která není ve spodní vrstvě, byl napsaný aritmetický průměr všech čísel z tmavších cihliček, než je ona.*



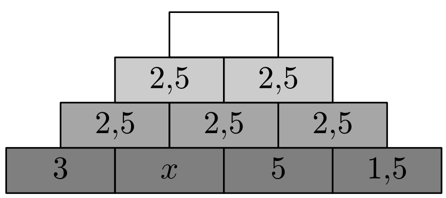
Řešení. Označme chybějící dolní číslo x. Potom aritmetický průměr čtyř čísel ve spodní vrstvě je $\frac{3+x+5+1,5}{4}$ což je $\frac{9,5+x}{4}$. Tento výraz zapišme do všech cihliček druhé vrstvy zdola. Ve třetí vrstvě zdola musí být vedle sebe také stejná čísla, takže do prázdné cihličky zapíšeme 2,5. Částečně doplněný obrázek nyní vypadá takto:



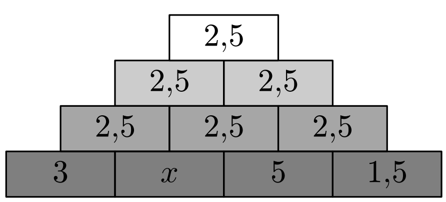
Podle zadání teď napíšeme vztah pro číslo 2,5, což má být aritmetický průměr všech čísel ve spodních dvou řadách:

$$2{,}5 = \frac{\frac{9{,}5+x}{4} + \frac{9{,}5+x}{4} + \frac{9{,}5+x}{4} + 3 + x + 5 + 1{,}5}{7} = \frac{3 \cdot \frac{9{,}5+x}{4} + 9{,}5 + x}{7},$$

což po vyřešení dává $x = 0{,}5$ a po zapsání do obrázku dostaneme:



Chybí jen spočítat číslo v nejvyšší vrstvě, tj. na vrcholu. Tam bude zřejmě také číslo 2,5. Výsledný obrázek potom bude vypadat takto:



2. *Zuzka, Martin, Jakub a Petra hráli kuličky. Když hra skončila, měla Zuzka o 4 kuličky méně než byla polovina všech kuliček, Martin měl pětinu všech kuliček a ještě 6 navíc, Jakub třikrát méně než Zuzka a Petra o jednu kuličku méně než Jakub. Které z dětí mělo na konci hry nejméně a které nejvíce kuliček?*

Řešení. Označme x celkové množství kuliček. Potom počet kuliček jednotlivých dětí lze pomocí x vyjádřit takto:

Zuzka ... $\frac{x}{2} - 4$
Martin ... $\frac{x}{5} + 6$
Jakub ... $(\frac{x}{2} - 4) : 3 = \frac{x}{6} - \frac{4}{3}$
Petra ... $\frac{x}{6} - \frac{4}{3} - 1 = \frac{x}{6} - \frac{7}{3}$

Nyní lze vyjádřit celkový počet kuliček x pomocí součtu všech kuliček všech dětí:

$$x = \frac{x}{2} - 4 + \frac{x}{5} + 6 + \frac{x}{6} - \frac{4}{3} + \frac{x}{6} - \frac{7}{3}.$$

Tento vztah upravíme:

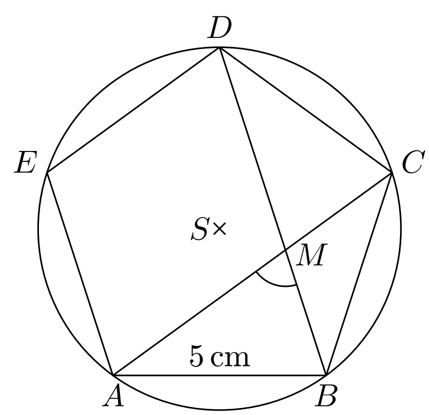
$$x = \frac{31x}{30} - \frac{5}{3}.$$

Odtud dostáváme, že $x = 50$.

Ve hře bylo tedy celkem 50 kuliček, které měly děti na konci hry v těchto počtech: Zuzka 21, Martin 16, Jakub 7 a Petra 6. Takže nejméně kuliček měla Petra a nejvíce Zuzka.

3. *V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ o straně délky 5 cm označme M průsečík úseček AC, BD. Vypočítej velikost úsečky AM a velikost úhlu AMB.*

Řešení. Situaci si načrtneme a označíme známé a hledané údaje



Protože se jedná o pravidelný pětiúhelník, můžeme doplnit všechny známé úhly:

$$|\sphericalangle ASB| = 360^\circ : 5 = 72^\circ.$$

Trojúhelník ABS je rovnoramenný, a proto

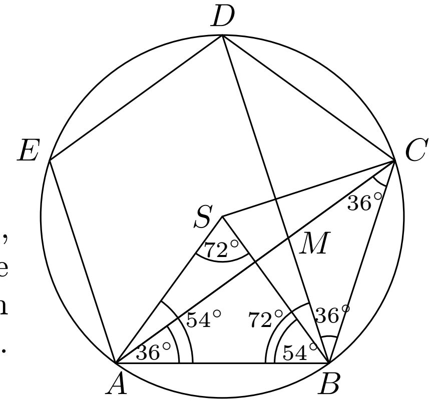
$$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA| = (180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ.$$
$$|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle SBC| = 54^\circ.$$

Trojúhelník ABC je rovnoramenný, a proto

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA| = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ.$$

Stejně platí i $|\sphericalangle CBD| = 36^\circ$, tedy

$$|\sphericalangle ABD| = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$



Odtud je již možno z trojúhelníku ABM spočítat $\sphericalangle AMB$, tj. $|\sphericalangle AMB| = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Nyní je vidět, že v trojúhelníku ABM jsou vnitřní úhly o velikostech $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$, z čehož plyne, že jde o rovnoramenný trojúhelník. Pak $|AB| = |AM| = 5\,\text{cm}$.

4. *Určete nejmenší přirozené číslo n, pro něž je součin*

$$\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n - \frac{1}{n}\right),$$

dělitelný stem.

Řešení. Naznačený součin postupně upravujeme, začněme od dvou činitelů, tj. dvou závorek:

$$\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4,$$
$$\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{15}{4} = 3 \cdot 5,$$
$$\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(5 - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{24}{5} = 3 \cdot 4 \cdot 6,$$
$$\left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(5 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(6 - \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{35}{6} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7.$$

Dostáváme tak jistou závislost na postupném přidávání činitelů:

počet činitelů	upravený součin
2	4
3	$3 \cdot 5$
4	$3 \cdot 4 \cdot 6$
5	$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$

Je vidět, že v upraveném součinu je vždy o jednoho činitele méně než v původním tvaru a že součin se skládá z řady přirozených činitelů, z nichž nejmenší je číslo tři (kromě prvního případu) a předposlední vždy chybí. Dál můžeme pokračovat bez výpočtů takto:

6	$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8$
7	$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9$
8	$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10$
9	$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11$

Nyní hledejme, který ze součinu je první dělitelný stem. Takový součin musí obsahovat ve svém rozkladu dvě z následujících možností: číslo 10, čísla 2 a 5, čísla 4 a 5, čísla 5 a 6 nebo čísla 5 a 8; jejich součin je dělitelný desíti. Takový případ nastane poprvé v případě $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10$, což znamená, že činitelů je nejméně 8. Snadno spočítáme, že součin je 201 600. Hledané n je rovno 9.

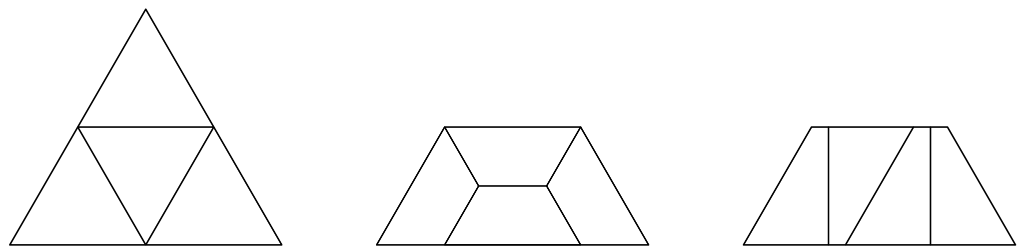
5. *Rozděl rovnostranný trojúhelník na čtyři shodné útvary. Jeden z nich odeber a zbytek opět rozděl na čtyři shodné útvary. Najdi alespoň jedno řešení a narýsuj je.*

Řešení. První dělení provedeme snadno na 4 shodné rovnostranné trojúhelníky tak, že sestrojíme střední příčky původního trojúhelníku.

Nyní máme odebrat jeden trojúhelník. Kdybychom odebrali prostřední, nevznikl by celistvý útvar a nešel by tedy dál dělit na 4 další shodné části. Odebereme proto krajní trojúhelník, čímž dostaneme rovnoramenný lichoběžník. Ten lze rozdělit na 4 shodné části — lichoběžníky — dvěma způsoby:

a) 4 shodné rovnoramenné lichoběžníky, v nichž ramena a horní základna jsou shodné a dolní základna je dvakrát delší než horní.

b) 4 shodné pravoúhlé lichoběžníky, z nichž jeden je shodný nepřímo. Pro sestrojení je třeba si rozdělit horní základnu na 8 shodných dílů a dolní základnu na 16 shodných dílů (protože je dvakrát větší). Potom sestrojené pravoúhlé lichoběžníky budou mít horní základnu dlouhou 1 díl a dolní základnu dlouhou 5 dílů.



6. *V době dovolené paní Veselé patnáctkrát pršelo, ale nikdy ne celý den. Když pršelo dopoledne, bylo odpoledne jasno. Pršelo-li odpoledne, bylo v tomto dni dopoledne jasno. Jasno bylo 9 dopolední a 8 odpolední. Jak dlouho trvala dovolená paní Veselé?*

1. Řešení. Z textu vyplývá, že v době dovolené byly 3 typy dnů, což lze zapsat přehledně do tabulky takto:

dopoledne	odpoledne
prší	jasno
jasno	prší
jasno	jasno

Jestliže pršelo 15 dní, bylo to v 15 dnech. Ale jasno bylo celkem sedmnáctkrát. Z toho patnáctkrát ve dnech, kdy pršelo a dvakrát tehdy, kdy nepršelo. Dvakrát jasno znamená jeden celý jasný den. Dovolená tedy trvala celkem 16 dní.

2. Řešení. Uvědomte si, že každý den je v uvedených hodnotách započítán dvakrát, tedy dovolaná trvala $\frac{15+9+8}{2}$, tj. 16 dní.