52. ročník Matematické olympiády

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z8

1. *Do tabulky na obrázku vepište navzájem různá přirozená čísla tak, aby součin čísel v každém řádku, každém sloupci i na obou úhlopříčkách byl* 1 000 *a součet čísel v prvním řádku a prvním sloupci byl co největší.*

Řešení. Soutěžící budou úlohu řešit většinou experimentem, tzn. po jisté době na některé řešení přijdou. Abychom však experiment usnadnili a vnesli do něho systém, využijeme znalostí žáků z dělitelnosti. Rozložíme číslo 1 000 na prvočinitele ($1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$) a vypíšeme všechny přirozené dělitele čísla 1 000 (1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1 000). Dále můžeme napsat všechny součiny tří různých přirozených čísel, jejichž součin je 1 000:

$$1 \cdot 2 \cdot 500,\ \ 1 \cdot 4 \cdot 250,\ \ 1 \cdot 5 \cdot 200,\ \ 1 \cdot 8 \cdot 125,\ \ 1 \cdot 10 \cdot 100,\ \ 1 \cdot 20 \cdot 50,\ \ 1 \cdot 25 \cdot 40,$$
$$2 \cdot 4 \cdot 125,\ \ 2 \cdot 5 \cdot 100,\ \ 2 \cdot 10 \cdot 50,\ \ 2 \cdot 20 \cdot 25,$$
$$4 \cdot 5 \cdot 50,\ \ 4 \cdot 10 \cdot 25,\ \ 8 \cdot 5 \cdot 25,\ \ 5 \cdot 10 \cdot 20.$$

Při řešení je stěžejní obsazení prostředního políčka. V něm může být pouze číslo obsažené v minimálně čtyřech součinech, tedy jedno z čísel 1, 2, 4, 5, 10, 25. Možnosti postupně vyzkoušíme. Řešení dostaneme jedině v případě, kdy je uprostřed číslo 10 (zdůvodnit to lze např. tak, že číslo 100 má právě čtyři dvojice sdružených dělitelů ($1 \cdot 100$, $2 \cdot 50$, $4 \cdot 25$, $5 \cdot 10$). Nyní již tabulku snadno vyplníme. Existuje celkem 8 možností, jak tabulku podle zadání vyplnit:

5	100	2
4	10	25
50	1	20

50	4	5
1	10	100
50	25	2

20	1	50
25	10	4
2	100	5

2	25	20
100	10	1
5	4	50

50	1	20
4	10	25
5	100	2

5	4	50
100	10	1
2	25	20

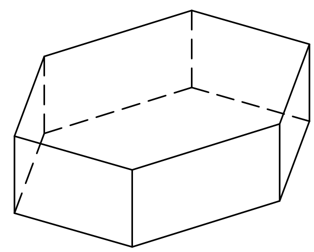
2	100	5
25	10	4
20	1	50

20	25	2
1	10	100
50	4	5

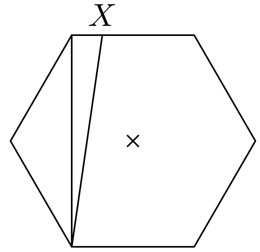
Ve skutečnosti jsou však řešení pouze dvě, neboť možnosti v prvním řádku vyjadřují tutéž tabulku (pouze otočenou), podobně možnosti ve druhém řádku jsou různá otočení téže tabulky. Vzhledem k podmínce maximálních součtů čísel v prvním řádku i sloupci vychází jediná možnost

5	100	2
4	10	25
50	1	20

2. *Mravenec obíhá rychlostí 1 cm za 4 sekundy po dráze tvaru pravidelného šestiúhelníku se stranou délky 1 cm okolo matice znázorněné na obrázku. Jak daleko od místa, ze kterého vystartoval (bod S), bude za dvě a čtvrt minuty?*



Řešení. Nejprve určíme dráhu, kterou mravenec za 135 sekund uběhne. S využitím známého vzorce $s = v \cdot t$ dostaneme délku dráhy 33,75 cm. Mravenec tedy oběhne pětkrát dokola matici (obvod má délku 6 cm) a při šestém oběhu skončí v bodě X (viz obrázek). Úkolem je určit délku úsečky SX.

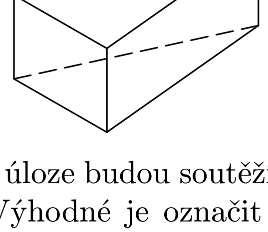


Vzdálenost středu šestiúhelníka od každé strany je rovna $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm (jedná se o výšku v rovnostranném trojúhelníku), vzdálenost dvou rovnoběžných stran je tedy $\sqrt{3}$ cm. Nyní z Pythagorovy věty určíme:

$$|SX| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

Mravenec bude ve vzdálenosti 1,75 cm od bodu S.

3. *Na obrázku je nakreslen trojboký hranol. Kolik existuje trojúhelníků, jejichž strany jsou hranami nebo úhlopříčkami stěn hranolu? Vypište je.*



Řešení. Podobně jako v první úloze budou soutěžící zřejmě postupovat experimentem, do něhož je nutno vnést systém. Výhodné je označit vrcholy hranolu A, B, C, D, E, F a nalezené trojúhelníky zapisovat pomocí označení vrcholů (součástí správného řešení je také vypsání daných trojúhelníků, nikoliv jen uvedení čísla označujícího počet). Zvolíme nyní označení podle obrázku. Trojboký hranol má dvě podstavné stěny ABC, DEF tvaru trojúhelníka a tři boční stěny $ABED$, $CBEF$, $CADF$ tvaru obdélníka nebo čtverce (toto rozlišení nemá pro úlohu význam). Obě podstavy jsou trojúhelníky (ABC, DEF), jejichž žádná strana není stěnovou úhlopříčkou hranolu. V každé stěně lze definovat 4 trojúhelníky (ABE, ADE, ABD, BED; BEF, CBF, CBE, EFC; ACD, CDF, ACF, ADF). Vypsaných 12 trojúhelníků má tu vlastnost, že právě jedna jejich strana je stěnovou úhlopříčkou hranolu a všechny leží v rovinách stěn hranolu.Nyní zbývají trojúhelníky, u nichž jedna ze stran je hranou hranolu a dvě strany jsou stěnovými úhlopříčkami hranolu. Těchto trojúhelníků je celkem 6 (ABF, AEF, CDE, ACE, BCD, BDF). Další případ zřejmě nemůže nastat, hledaných trojúhelníků je celkem 20.

4. *Na matematickém táboře se 80 dětí rozdělilo do pěti skupin. Vedoucí však nebyl spokojen a požádal, aby pětina dětí z první skupiny přešla do druhé. Ani pak se mu rozdělení nelíbilo a chtěl, aby pětina dětí přešla ze druhé skupiny do třetí. Potom ještě pětina ze třetí skupiny musela přejít do čtvrté. Pak žádal, aby pětina členů čtvrté skupiny přešla do páté a konečně pětina z páté skupiny se přidala k první. Tak vznikly stejně početné skupiny. Jaké bylo původní rozdělení dětí?*

Řešení. Úlohu je sice možno řešit od neznámého původního rozdělení dětí ke konečnému pomocí algebraických rovnic, tato metoda však vede k značně složitým výrazům. Proto je lepší řešit úlohu „od konce“ pomocí experimentu. Při konečném rozdělení dětí jich bylo v každé skupině 16. Nyní budeme modelovat situaci od posledního přesunu k prvnímu. Vždy je nutno si uvědomit, že počet členů skupiny, ze které při daném přesunu pětina dětí odešla, je roven čtyřem pětinám počtu dětí před přesunem. Použijeme tabulku (skupiny píšeme v pořadí: první, druhá, třetí, čtvrtá, pátá):

Přesun	Počet po přesunu	Počet před přesunem
pátý	16 16 16 16 16	12 16 16 16 20
čtvrtý	12 16 16 16 20	12 16 16 20 16
třetí	12 16 16 20 16	12 16 20 16 16
druhý	12 16 20 16 16	12 20 16 16 16
první	12 20 16 16 16	15 17 16 16 16

Je-li po přesunu pětiny dětí ve skupině 16 dětí (tj. čtyři pětiny původního počtu), musel být původní počet (pět pětin) roven 20 (týká se druhé až páté skupiny při druhém až pátém přesunu). Zbylo-li po prvním přesunu v první skupině 12 dětí, je jedna pětina rovna 3 dětem, a proto původní počet dětí v první skupině je 15. Původní rozdělení dětí tedy bylo 15, 17, 16, 16, 16.

5. *Slečna Vectorová dala Hermioně tuto úlohu: „Narodila jsem se v den, jehož datum zapsané bez teček je současně pořadovým číslem tohoto dne v roce (např. 14. 1. dá číslo 141, ale je to jen 14. den v roce). Když vynásobíte den a měsíc mých narozenin, dostanete můj věk v roce 2201.“ Vypočítejte, kdy se slečna Vectorová narodila.*

Řešení. Nejprve je nutno určit všechny dny v roce, které vyhovují dané podmínce pořadového čísla. Opět není nutno zkoumat pořadová čísla všech 365 (366) dní v roce, ale je možno užít různých úvah, které počet zkoumaných dnů podstatně omezí. Lze volit např. tuto: Vyjdeme z pořadového čísla dne v roce. V lednu může být podmínka splněna pouze pro 1., 11., 21., 31. den v roce (protože zápis lednového data je ?.1.). Ani jeden z těchto dnů podmínce nevyhovuje. V únoru se může jednat pouze o 32., 42. a 52. den. Ani jeden nevyhovuje (32. den je 1.2., 42. den je 11.2., 52. den je 21.2.). V březnu se dále může jednat o den 63., 73., 83., z nichž ani jeden nevyhovuje. Takto pokračujeme dále až do měsíce září, kdy vyhovuje datum 26.9. (je to 269. den v roce). V říjnu uvažujeme pouze data 1.10., 2.10., 3.10, z nichž žádné nevyhovuje (další data v říjnu již vedou k větším pořadovým číslům než 365). Analogicky vyloučíme všechny dny v listopadu a v prosinci. Výsledkem těchto úvah je zjištění, že dané podmínce vyhovuje jediný den v roce, a to výše uvedené datum 26.9. Podobných úvah, jak dospět k tomuto zjištění, může být celá řada. Vždy se však jedná o jistou formu experimentu, kterou nelze nijak jednoduše algoritmicky popsat. Máme-li již určeno datum, není problémem určit rok narození. Protože $26 \cdot 9 = 234$, bude mít slečna Vectorová v roce 2201 věk 234 let. Odečtením určíme rok narození 1967. Slečna Vectorová se narodila 26.9. 1967.

6. *Radka ráda posílá z mobilu textové zprávy (dále jen SMS). Každý den pošle tři. Zaslání jedné stojí 2,50 Kč. Po zaslání určitého počtu SMS má možnost vybrat si právě jednu z následujících prémií:*

- po 10 poslaných SMS lze poslat 1 SMS zdarma,
- po 100 poslaných SMS lze poslat 10 SMS zdarma,
- po 1 000 poslaných SMS lze poslat 100 SMS zdarma.

Kolik nejméně zaplatí za odeslané SMS za jeden rok od první odeslané zprávy?

Řešení. Za jeden rok pošle Radka $3 \cdot 365 = 1095$, popř. v přestupném roce $3 \cdot 366 = 1098$ zpráv SMS. O přestupnosti roku se v zadání nehovoří, neboť tento fakt nemá pro řešení význam. Po zaslání 1 000 SMS Radka posílá 100 SMS zadarmo, tedy všechny zprávy od 1 001. dále jsou zdarma. Otázkou tedy je, kolik SMS bude zadarmo z poslaných 1 000. Během 1 000 SMS vyčerpá celkem 9 prémií za každých 100, tedy z těchto prémií bude zadarmo $9 \cdot 10 = 90$ SMS. Nyní určíme počet prémií za 10 SMS. Od 1. do 999. zprávy odešle 99 desítek zpráv ($999 = 99 \cdot 10 + 9$), což určuje nárok na 99 nejnižších prémií jedné neplacené SMS. Z nich však 9 těchto prémií je „překryto“ prémií vyšší (po 100 SMS, 200, 300, 900 SMS), které jsme již vyřešili. Celkem tedy Radka využije 90 prémií jedné SMS, 9 prémií 10 SMS a jednu prémii 100 SMS. Zdarma tedy bude celkem $90 + 90 = 180$ zpráv do 1 000 SMS a všechny následující až do konce roku. Platit bude potom $820 \cdot 2{,}50$ Kč $= 2\,050$ Kč. Radka zaplatí za rok 2 050 Kč.