Komentáře k domácímu kolu kategorie Z9

1. *Nahraďte hvězdičky v čísle 683∗∗∗ vhodnými číslicemi tak, aby výsledné šestimístné číslo bylo dělitelné 7, 8 a 9.*

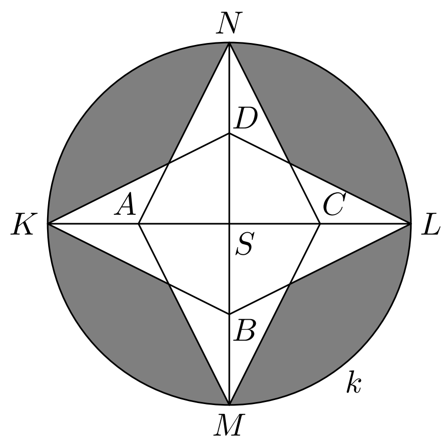
Řešení. Má-li být číslo dělitelné $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ a zároveň $9 = 3 \cdot 3$ a zároveň 7, musí být dělitelné i nejmenším společným násobkem čísel 7, 8 a 9, což je

$$n(7, 8, 9) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504.$$

Hledaný násobek čísla 504 musí ležet v intervalu $\langle 683\,000, 683\,999\rangle$. Po vydělení 683 000 číslem 504 získáme neúplný podíl 1 355 a zbytek 80. Odtud dostáváme, že nejmenší násobek 504 v tomto intervalu bude $1\,356 \cdot 504 = 683\,424$, další násobek: $683\,424 + 504 = 683\,928$.

Úloha má tedy 2 řešení: 683 424 a 683 928.

2. *Vypočítejte obsah šedé plochy vyznačené na obrázku, pokud víte, že KL a MN jsou dva navzájem kolmé průměry kružnice $k(S, 6\,\mathrm{cm})$ a body A, B, C a D jsou po řadě středy úseček KS, MS, LS a NS.*



Řešení. Označme $X \in DL \cap NC$. Trojúhelník SLX je rozdělen úsečkou XC na dva trojúhelníky se shodným obsahem ($|SC| = |CL|$ dle zadání úlohy; výška na tuto stranu je společná pro oba trojúhelníky). Bílou plochu můžeme rozdělit na 8 trojúhelníků shodných s $\triangle SLX$, tedy na 16 trojúhelníků, které mají stejný obsah jako $\triangle SCX$.

$$S_{\triangle ACN} = \frac{|AC| \cdot |SN|}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\,\mathrm{cm}^2.$$

Také ale platí

$$S_{\triangle ACN} = 2 \cdot S_{\triangle SCN} = 2 \cdot (S_{\triangle SCX} + S_{\triangle SXD} + S_{\triangle DXN}) = 2 \cdot 3 \cdot S_{\triangle SCX}.$$

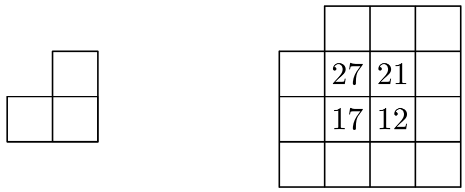
Tedy:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ACN} &= 6 \cdot S_{\triangle SCX}, \\ 18 &= 6 \cdot S_{\triangle SCX}, \\ S_{\triangle SCX} &= 3\,\mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

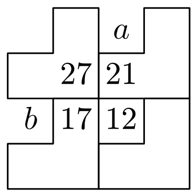
Obsah šedé plochy S je roven rozdílu obsahu kruhu a obsahu bílého obrazce:

$$S = \pi r^2 - 16 \cdot S_{\triangle SCX},$$
$$S = \pi 6^2 - 16 \cdot 3,$$
$$S = 12 \cdot (3\pi - 4)\,\mathrm{cm}^2,$$
$$S \doteq 65{,}04\,\mathrm{cm}^2.$$

3. *Do tabulky na obrázku byla doplněna čísla tak, že součet trojice v každém „trojčtverečku“ (bez otáčení) byl stejný. Určete součet čísel v tabulce.*



Řešení. Součet čísel v každém „trojčtverečku“ musí být $17 + 12 + 21 = 50$. Danou tabulku lze rozdělit na 4 nepřekrývající se „trojčtverečky“ a tím nám zbydou 3 samostatná pole (a, b, 12).

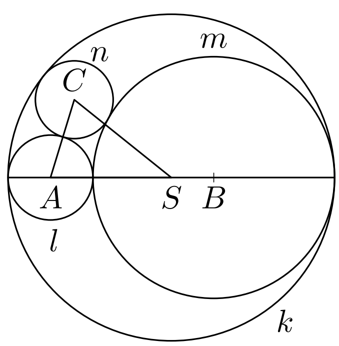


Vypočítáme si čísla v polích a, b:

$$a = 50 - (27 + 21) = 2,$$
$$b = 50 - (27 + 17) = 6.$$

Součet všech čísel v tabulce je $4 \cdot 50 + a + b + 12 = 4 \cdot 50 + 2 + 6 + 12 = 220$.

4. *Na průměru kružnice $k(S, r)$ leží středy dvou kružnic $l(A, r_1)$ a $m(B, r_2)$, které se vzájemně vně dotýkají a dotýkají se i kružnice k. Navíc uvnitř kružnice k leží ještě kružnice $n(C, r_3)$, která se dotýká kružnic k, l a m (obr.). Světlana si myslí, že obvod trojúhelníku ASC je větší než průměr kružnice k. Má pravdu? Proč?*



Řešení. Průměr kružnice k: $2r$.

Obvod $\triangle ASC$: $o = |AS| + |SC| + |CA| = (r - r_1) + (r - r_3) + (r_1 + r_3) = 2r$.

Závěr: Světlana nemá pravdu, protože obvod trojúhelníka ASC je roven průměru kružnice k.

5. *Průměrný věk žáka naší školy je 10 let, průměrný věk učitelů je 54 let, průměrný věk žáků a učitelů dohromady je 12 let. Určete průměrný počet žáků ve třídě této školy, pokud víte, že učitelé učí průměrně 21 hodin týdně a děti mají v průměru 24 vyučovacích hodin týdně.*

ŘEŠENÍ. Označme si počet žáků ve škole z, počet učitelů u, počet tříd t a hledaný průměrný počet žáků ve třídě x. Ze zadání vyplývá:

a) průměrný počet žáků a učitelů

$$\begin{aligned} 10z + 54u &= 12(z + u), \\ 10z + 54u &= 12z + 12u, \\ 2z &= 42u, \\ z &= 21u. \end{aligned}$$

b) počet žáků ve škole

$$\begin{aligned} z &= 21u, \\ z &= tx, \end{aligned}$$

tedy $21u = tx$.

c) počet odučených hodin

$$24t = 21u$$

a po dosazení tx za $21u$ dostáváme:

$$\begin{aligned} 24t &= tx, \\ 24 &= x. \end{aligned}$$

Ve třídě této školy je průměrně 24 žáků.

6. *Martin chodí ze školy obvykle pěšky. Pokud jede na kole, jeho průměrná rychlost zvýší o 10 km/h a doba, kterou mu trvá cesta, se zkrátí o 15 minut. Přijede-li pro něj otec autem, průměrná rychlost se zvýší šestkrát a čas se zkrátí o 20 minut. Jak daleko to má Martin do školy (trasa do školy je ve všech případech stejná)?*

ŘEŠENÍ. a) pěšky:

$$\begin{aligned} & v\,\mathrm{km/h}, \\ & t\,\mathrm{h}, \\ & s = v \cdot t\,\mathrm{km}. \end{aligned}$$

b) jízda na kole:

$$\begin{aligned} & (v + 10)\,\mathrm{km/h}, \\ & \left(t - \frac{1}{4}\right)\mathrm{h}, \\ & s = (v + 10)\left(t - \frac{1}{4}\right)\mathrm{km}. \end{aligned}$$

c) jízda autem:

$$(6v)\,\mathrm{km/h},$$
$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\mathrm{h},$$
$$s = 6v\cdot\left(t-\frac{1}{3}\right)\,\mathrm{km}.$$

Dostáváme tak soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$s = vt,$$
$$s = (v+10)\left(t-\frac{1}{4}\right),$$
$$s = 6v\cdot\left(t-\frac{1}{3}\right).$$

Řešením je $t=\frac{2}{5}\,\mathrm{h}$, $v = 6\,\mathrm{km/h}$ a $s = 2{,}4\,\mathrm{km}$.

Martin chodí do školy vzdálené 2,4 km.