## II. kolo kategorie Z7

### Z7–II–1

Najdi všechny trojice přirozených čísel $a$, $b$, $c$ tak, aby $a < b < c$ a hodnota zlomku $\frac{1}{7}(44 - abc)$ byla přirozené číslo. (*Ptáčková*)

Řešení. Označme čitatel zlomku, tj. výraz $44 - abc$ jako $p$. Má-li být daný podíl přirozené číslo, musí být $p$ přirozené číslo dělitelné sedmi menší než 44. V úvahu tedy přicházejí čísla 42, 35, 28, 21, 14, 7. Tomu odpovídají tyto hodnoty součinu $abc$: 2, 9, 16, 23, 30, 37. Tato čísla napíšeme jako součin tří navzájem různých přirozených čísel: 2 … nelze, 9 … nelze, $16 = 1 \cdot 2 \cdot 8$, 23 … nelze, $30 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, 37 … nelze. Řešením jsou tedy tyto uspořádané trojice čísel $a$, $b$, $c$:

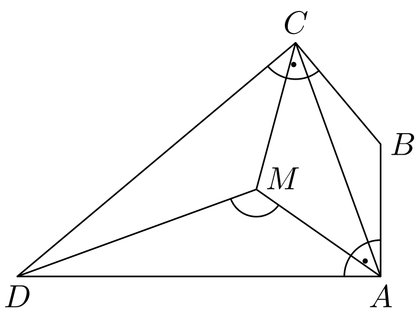
$$[1, 2, 8],\ [1, 2, 15],\ [1, 2, 13],\ [1, 5, 6],\ [2, 3, 5].$$

### Z7–II–2

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ (s vnitřními úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ platí: $\alpha = \gamma = 90°$, $|AD| = |CD|$ a $\beta = \delta + 100°$. Označme $M$ průsečík os úhlů $DAC$ a $ACD$. Jaká je velikost vnitřního úhlu při vrcholu $M$ v trojúhelníku $AMD$. (*Ptáčková*)

Řešení. Nejprve si vypočítáme velikosti zbývajících úhlů. Součet vnitřních úhlů v libovolném čtyřúhelníku je roven 360°, tedy $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360$, po dosazení ze zadání dostáváme $90 + (\delta + 100) + 90 + \delta = 360$, odtud $\delta = 40°$ a $\beta = 140°$.

Nyní si budeme všímat pouze trojúhelníku $ACD$ (obr.). Ten je rovnoramenný se základnou $AC$, jak vyplývá ze zadání. Zjistíme tedy velikost úhlu $\omega$ při základně. Platí: $180° = 40° + 2\omega$, velikost úhlu při základně tedy je 70°.




$\triangle AMD$: vnitřní úhel při vrcholu $A$ má velikost $70° : 2 = 35°$, vnitřní úhel při vrcholu $D$ má velikost $40° : 2 = 20°$. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu $M$ je rovna $180° - 35° - 20° = 125°$.

### Z7–II–3

Dominik pozoroval sedačkovou lanovku. Nejdříve zjistil, že spodní stanicí projede každých 8 sekund jedna sedačka. Potom si jednu sedačku vyhlédl, zmáčkl stopky a chtěl změřit, jak dlouho potrvá, než se sedačka opět vrátí do spodní stanice. Po 3 minutách a 28 sekundách pustili lanovku rychleji, takže sedačky projížděly spodní stanicí každých 5 sekund. Když pak projížděla Dominikova sedačka, stopky ukazovaly 11 minut a 13 sekund. Kolik sedaček měla lanovka? (*Dillingerová*)

Řešení. Za 3 minuty a 28 sekund (což je 208 sekund) projelo kolem Dominika $208 : 8 = 26$ sedaček. Od zrychlení do doby, než kolem Dominika projela jeho sedačka, uplynulo 11 minut 13 sekund − 3 minuty 28 sekund, což je 7 minut a 45 sekund (465 sekund). Za dobu, kdy jezdila lanovka rychleji, projelo kolem Dominika $465 : 5 = 93$ sedaček (včetně té Dominikovy). Lanovka měla celkem $26 + 93 = 119$ sedaček.