II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Do Miroslavova království chodil švec Matěj nejen si zazpívat, ale i dobře se najíst a napít. Za jeden zlaťák dostal celou husu a jeden džbánek vína. Pak tam ale zvýšili ceny o 20 % a za zlaťák dostal už jen půl džbánku vína a celou husu. Proslýchá se, že po úplňku se ceny znovu zvýší o 20 %. Dostane pak Matěj za svůj zlaťák aspoň jednu celou husu? (*Volfová*)

Řešení. Cenu celé husy ve zlaťácích označíme jako h, cenu džbánku vína jako v.

a) Situace před zdražením: $h + v = 1$.

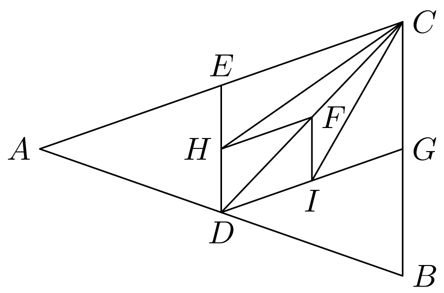
b) Situace po zdražení o 20 %: $h + v = 1{,}2$.

Zároveň ale víme, že $h + \frac{v}{2} = 1$, tedy $\frac{v}{2} = 0{,}2$, takže cena džbánku vína po zdražení byla $v = 0{,}4$ zlaťáku a cena celé husy $h = 0{,}8$ zlaťáku.

c) Situace po předpokládaném zdražení o dalších 20 %: $h = 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$ zlaťáku, tedy i po dalším zdražení dostane Matěj za jeden zlaťák celou husu.

Z8–II–2

Zjistěte obsah trojúhelníku ABC z obrázku, pokud víte, že každý bod je buď střed, nebo krajní bod úsečky, a obsah čtyřúhelníku $CHFI$ je $5\,\mathrm{cm}^2$. (*Dillingerová*)



Řešení. Protože bod F je střed úsečky CD, platí: $S_{CFH} = S_{DFH}$ a $S_{CFI} = S_{DFI}$, tedy $S_{CHDI} = 2{,}5 = 10\,\mathrm{cm}^2$.

Bod H je střed úsečky ED a bod I je střed úsečky DG, platí: $S_{CHD} = S_{CHE}$ a $S_{CID} = S_{CIG}$. Obsah čtyřúhelníku $CEDG$ je tedy dvakrát větší než obsah čtyřúhelníku $CHDI$, a to $20\,\mathrm{cm}^2$.

Obdobně E je střed úsečky AC a G střed úsečky BC. Zase tedy platí $S_{CDE} = S_{ADE}$ a $S_{CDG} = S_{BDG}$. Obsah trojúhelníku ABC je tedy dvojnásobek obsahu čtyřúhelníku $CEDG$, takže ABC má obsah $40\,\mathrm{cm}^2$.

Z8–II–3

Žáci 8. A volili ze čtyř kandidátů svého zástupce do školního parlamentu. Dohodli se, že ke zvolení je třeba nadpoloviční počet hlasů (z přítomných žáků) a každý z žáků, včetně kandidátů, má jeden hlas. V prvním kole nebyl nikdo zvolen. Aničce chyběly ke zvolení 3 hlasy, Petrovi 9 hlasů, Markovi 5 hlasů a Jitce 4 hlasy. Kolik je žáků ve třídě, jestliže hlasovali všichni žáci 8. A kromě 5 žáků, kteří se hlasování pro nemoc nezúčastnili?

(*Majer*)

Řešení. Počet žáků, kteří hlasovali, si označíme jako x.

Dále si příklad rozdělíme na dvě situace:

a) hlasoval sudý počet žáků,

b) hlasoval lichý počet žáků.

Nejprve vyřešíme situaci, kdy byl sudý počet voličů. Ke zvolení bylo potom potřeba $\frac{1}{2}x + 1$ hlasů. Anička získala $\frac{1}{2}x + 1 - 3$ hlasy, Petr $\frac{1}{2}x + 1 - 9$ hlasů, Marek $\frac{1}{2}x + 1 - 5$ hlasů a Jitka $\frac{1}{2}x + 1 - 4$ hlasy. Protože volil každý, musí platit

$$\frac{x}{2} + 1 - 3 + \frac{x}{2} + 1 - 9 + \frac{x}{2} + 1 - 5 + \frac{x}{2} + 1 - 4 = x.$$

Odtud $x = 17$, což je liché číslo a tedy není naším hledaným řešením.

Druhá situace — lichý počet žáků. Ke zvolení bylo potřeba $\frac{1}{2}(x + 1)$ hlasů. Anička jich získala $\frac{1}{2}(x+1) - 3$, Petr $\frac{1}{2}(x+1) - 9$, Marek $\frac{1}{2}(x+1) - 5$ a Jitka $\frac{1}{2}(x+1) - 4$. Volili všichni přítomní, proto platí

$$\frac{x+1}{2} - 3 + \frac{x+1}{2} - 9 + \frac{x+1}{2} - 5 + \frac{x+1}{2} - 4 = x.$$

Odtud $x = 19$, což je skutečně hledaným řešením. Jestliže se 5 žáků 8. A pro nemoc nezúčastnilo, chodí do této třídy $19 + 5 = 24$ žáků.