III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Najděte takové dvojciferné číslo, které po vydělení svým ciferným součtem dává třetinu svého ciferného součtu. (*Bálintová*)

Řešení. Hledané dvojciferné číslo můžeme napsat jako $10a+b$, jeho ciferný součet potom bude $a+b$. Zadání úlohy tedy můžeme přepsat takto:

$$(10a+b) : (a+b) = \frac{a+b}{3}.$$

To lze přepsat na tvar

$$10a+b = \frac{(a+b)^2}{3}.$$

Vidíme, že ciferný součet hledaného čísla musí být dělitelný třemi, takže přicházejí v úvahu pouze tyto ciferné součty: 3, 6, 9, 12, 15, 18. Užitím výše uvedeného vztahu dostáváme po řadě tato čísla: 3, 12, 27, 48, 75, 108. Po provedení zkoušky zjistíme, že zadání vyhovují pouze dvě, a to 27 a 48.

Z9–III–2

Silvia, Martina a Zdenka mají každá jinou oblíbenou květinu, trénují právě jeden sport (každá jiný) a každá z nich hraje na právě jeden hudební nástroj (každá na jiný). Silvie nehraje volejbal. Ta, jejíž oblíbený květ je tulipán, hraje basketbal a nehraje na klavír. Zdenka hraje na kytaru a její oblíbená květina je růže. Martina hraje na flétnu. Narcis není oblíbená kytka volejbalistky. Vypátrejte, co která dívka trénuje, na co hraje a jaká je její oblíbená květina. (*Bálintová*)

Řešení. Vytvoříme výchozí *tabulku*, ve které budou u každé dívky uvedené všechny tři květiny, sporty i hudební nástroje:

Silvie:	tulipán, růže, narcis
	volejbal, basketbal, tenis
	klavír, kytara, flétna
Martina:	tulipán, růže, narcis
	volejbal, basketbal, tenis
	klavír, kytara, flétna
Zdenka:	tulipán, růže, narcis
	volejbal, basketbal, tenis
	klavír, kytara, flétna

Nyní budeme postupně upravovat tabulku podle zadání:

Silvie nehraje volejbal. Zdenka hraje na kytaru a její oblíbená květina je růže. Martina hraje na flétnu. Je tedy:

Silvie:	tulipán, růže, narcis
	basketbal, tenis
	klavír, kytara, flétna
Martina:	tulipán, růže, narcis
	volejbal, basketbal, tenis
	flétna
Zdenka:	růže
	volejbal, basketbal, tenis
	kytara

Vidíme, že Martina ani Silvie nemohou hrát na kytaru a jejich oblíbenou květinou není růže, dále že Silvie nemůže hrát na flétnu. Získáme tak tabulku:

Silvie:	tulipán, narcis
	basketbal, tenis
	klavír
Martina:	tulipán, narcis
	volejbal, basketbal, tenis
	flétna
Zdenka:	růže
	volejbal, basketbal, tenis
	kytara

Z věty *„Ta, jejíž oblíbený květ je tulipán, hraje basketbal a nehraje na klavír“* zjistíme, že Zdenka nehraje basketbal (má ráda růže a ne tulipán).

Silvie:	tulipán, narcis
	basketbal, tenis
	klavír
Martina:	tulipán, narcis
	volejbal, basketbal, tenis
	flétna
Zdenka:	růže
	volejbal, tenis
	kytara

Znovu se vrátíme k větě *„Ta, jejíž oblíbený květ je tulipán, hraje basketbal a nehraje na klavír“*. Dívka, o které se mluví, nehraje na klavír (tzn. nejde o Silvii) a nemůže jít ani o Zdenku (kvůli výše uvedenému důvodu), jedná se tedy o Martinu. Získáme tak tabulku:

Silvie:	tulipán, narcis
	basketbal, tenis
	klavír
Martina:	tulipán
	basketbal
	flétna
Zdenka:	růže
	volejbal, tenis
	kytara

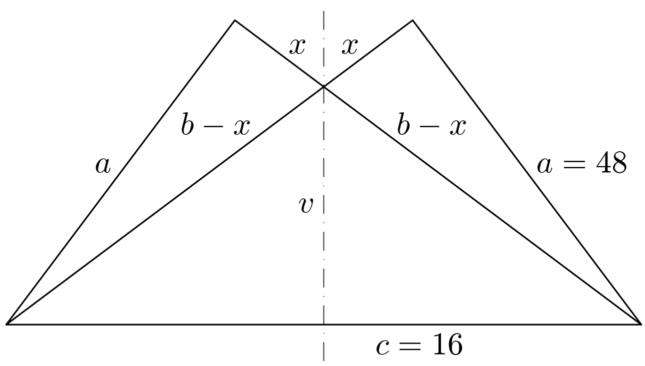
Zjistili jsme tak, že Silvie nehraje basketbal a nemá ráda tulipány. Tím pádem hraje tenis a má ráda narcisy. Odtud vidíme, že Zdenka hraje volejbal. Takto vypadá výsledná tabulka:

Silvie:	narcis
	tenis
	klavír
Martina:	tulipán
	basketbal
	flétna
Zdenka:	růže
	volejbal
	kytara

Z9–III–3

Martin si vystřihnul z papíru obdélník, jehož délky stran byly v poměru $3:4$ a kružnice opsaná tomuto obdélníku měla poloměr 8 cm. Potom tento obdélník přeložil po úhlopříčce a vznikl mu pětiúhelník. Vypočítejte obvod Martinova pětiúhelníku. (*Dillingerová*)

Řešení. Na obrázku je znázorněna vzniklá situace — popis vychází ze skutečnosti, že daný obrazec je osově souměrný. Pro obvod tohoto pětiúhelníku tedy platí: $o = 16+a+x+x+a$, kde a je kratší strana obdélníku a x úsek na delší straně obdélníku.



Nejdříve vypočítáme a:

Označíme si strany Martinova obdélníku jako $a = 3y$ a $b = 4y$. Z Pythagorovy věty potom dostáváme, že úhlopříčka obdélníku měří $5y$.

Protože střed kružnice opsané obdélníku leží v průsečíku jeho úhlopříček a její průměr je roven délce této úhlopříčky, platí: $5y = 2 \cdot 8$, z toho $y = \frac{16}{5}$ cm. Po dosazení do vyjádření délek stran Martinova obdélníku dostáváme $a = 9{,}6\,\mathrm{cm}$ a $b = 12{,}8\,\mathrm{cm}$.

Nyní vypočítáme x:

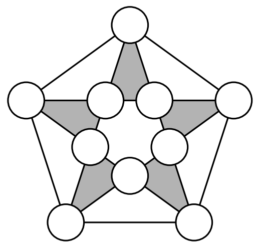
K tomu využijeme znovu Pythagorovu větu a vyjdeme ze silně vyznačeného trojúhelníku:

$$\begin{aligned}(12{,}8 - x)^2 &= x^2 + 9{,}6^2,\\ 163{,}84 - 25{,}6x + x^2 &= x^2 + 92{,}16,\\ -25{,}6x &= -71{,}68,\\ x &= 2{,}8\,\mathrm{cm}.\end{aligned}$$

Obvod Martinova pětiúhelníku je tedy roven

$$o = 16 + 9{,}6 + 2{,}8 + 2{,}8 + 9{,}6 = 40{,}8\,\mathrm{cm}.$$

Z9–III–4



Do kroužků na obrázku doplňte čísla od 1 do 10 (každé jednou) tak, aby současně platilo:

– součet všech čísel v malém pětiúhelníku je o 5 menší, než součet všech čísel ve velkém pětiúhelníku,

– všechny součty trojic čísel v obarvených trojúhelnících jsou stejné.

(*Dillingerová*)

Řešení. Nejprve si určíme, jaké součty musí být v obou pětiúhelnících. Víme, že součet čísel v celém obrázku je roven součtu čísel 1 až 10, tedy: $1+2+3+\ldots+10 = 55$. Označíme-li součet čísel v malém pětiúhelníku jako S_1 a součet čísel ve velkém pětiúhelníku jako S_1+5, platí zároveň: $55 = S_1 + (S_1 + 5)$ a odtud $S_1 = 25$. Součet čísel ve velkém pětiúhelníku je tedy roven 30.

Dále zjistíme, jaký je součet S_2 čísel v silně vyznačených trojúhelnících. Pokud bychom sečetli součty trojic čísel ve všech těchto trojúhelnících (tedy $5 \cdot S_2$), objevilo by se v něm každé číslo z velkého pětiúhelníku jednou a každé číslo z malého pětiúhelníku dvakrát. Dostáváme tak $5 \cdot S_2 = 2 \cdot 25 + 30$, tedy $S_2 = 16$.

Určíme si všechny přípustné trojice čísel, jejichž součet je roven 16: $10+5+1$, $10+4+2$, $9 + 6 + 1$, $9 + 5 + 2$, $9 + 4 + 3$, $8 + 7 + 1$, $8 + 6 + 2$, $8 + 5 + 3$, $7 + 6 + 3$, $7 + 5 + 4$.

Zkoušením najdeme řešení (obr.). (Další řešení jsou buď otočená, nebo překlopená.)