II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Z čísel 959 362 a 192 075 vyškrtneme celkem 5 číslic. Pak od většího z takto vzniklých čísel odečteme číslo menší. Jaký nejmenší rozdíl můžeme dostat? (*Bednářová*)

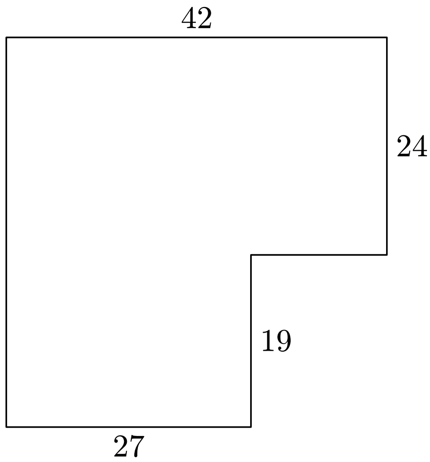
Řešení. Z jednoho čísla vyškrtneme 2 číslice, z druhého 3 číslice, a to tak, aby první číslo (2 vyškrtnuté číslice) bylo co nejmenší a druhé (3 vyškrtnuté číslice) bylo co největší. Jsou tedy dvě možnosti:

1. 2 číslice z 959 362 a 3 číslice z 192 075: $5\,362 - 975 = 4\,387$,
2. 2 číslice z 192 075 a 3 číslice z 959 362: $1\,075 - 996 = 79$

Nejmenší rozdíl, který můžeme dostat, je 79.

Z5–II–2

Když se dva obdélníky skamarádí, spojí se stranami tak, aby měly alespoň jeden vrchol společný. Po skamarádění 2 obdélníků vznikl obrázek:



Urči, jaké mohly být rozměry původních obdélníků. (*Dillingerová*)

Řešení. Jsou dvě možnosti:

1. jeden obdélník 42 cm a 24 cm, druhý 27 cm a 19 cm
2. jeden obdélník 27 cm a 43 cm, druhý 15 cm a 24 cm

Z5–II–3

Pan Majer chová 25 beránků a 30 oveček. Jednoho beránka ostříhá za čtvrt hodiny. Ostříhání 5 oveček mu trvá stejně dlouho jako ostříhání 4 beránků. Co mu bude trvat déle: ostříhání všech oveček anebo všech beránků? O kolik minut? (*kolektiv autorů*)

Řešení. Ze zadání vyplývá, že pan Majer ostříhá za 1 hodinu 4 beránky a za tutéž dobu 5 oveček. Všechny ovečky ostříhá za $30 : 5 = 6$ hodin. Za 6 hodin ale ostříhá jen $6 \cdot 4 = 24$ beránků (jeden zbyde neostříhaný).

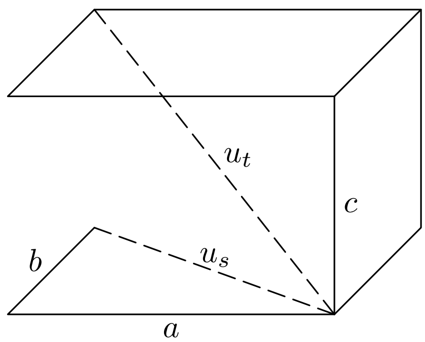
Déle bude stříhat beránky, a to o 15 minut.

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Tělesová úhlopříčka kvádru měří 17 cm. Jaké mohou být rozměry takového kvádru, jsou-li v cm vyjádřeny navzájem různými přirozenými čísly? (*Ptáčková*)

Řešení. Označme strany kvádru a, b, c a úhlopříčky (stěnovou i tělesovou jako na obrázku).



Z Pythagorovy věty plyne, že

$$u_s^2 = a^2 + b^2, \quad u_t^2 = u_s^2 + c^2.$$

Vzhledem k zadání platí, že

$$17^2 = u_s^2 + c^2.$$

Po dosazení za u_s^2 dostáváme rovnici:

$$17^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Hledáme tedy takovou trojici přirozených čísel, aby součet jejich druhých mocnin byl 17^2, tedy 289. Tomu vyhovují pouze čísla 12, 9 a 8.

Rozměry kvádru jsou 12 cm, 9 cm a 8 cm.

Z9–II–2

V delfináriu měli jednotné vstupné 4 euro. Poslední neděli snížili vstupné, tím se počet návštěvníků zvýšil o dvě třetiny a příjem v pokladně stoupl o 25 %. O kolik euro bylo sníženo vstupné? (*Krejčová*)

Řešení. Označíme n počet návštěvníků před slevou a x cenu lístku po slevě.

Ze zadání úlohy plyne rovnice

$$\left(n + \frac{2}{3}n\right) \cdot x = 4 \cdot n \cdot 1{,}25.$$

Odtud po úpravě dostaneme, že

$$x = 3.$$

Nová cena je tedy 3 euro, vstupné bylo sníženo o 1 euro.

Z9–II–3

Moderní čísla jsou taková, jejichž některé 4 po sobě jdoucí číslice jsou 2, 0, 0, 3 (v tomto pořadí). Najděte nejmenší moderní číslo, které se dá beze zbytku dělit každou svou nenulovou číslicí. (*Bednářová*)

Řešení. Ze zadání je patrné, že hledané číslo musí být sudé. Musíme tedy na poslední místo přidat sudou číslici. Současně, ale musí být hledané číslo dělitelné třemi a to lze splnit jen pokud přidáme 4. Dostaneme tak číslo

$$20\,034,$$

to však není dělitelné 4. Vidíme, že přidat jednu cifru nestačí. Pokud budeme „na konec" přidávat dvě cifry, tak ihned vidíme, že nejmenší možné moderní číslo je

$$200\,304.$$

Ještě bychom mohli přidávat jednu cifru na první místo a jednu na poslední. Vzhledem k tomu, že už máme nalezeno číslo 200 304 nemá smysl dát na první číslo jinou cifru než 1. Hledáme tedy moderní číslo ve tvaru

$$120\,03*,$$

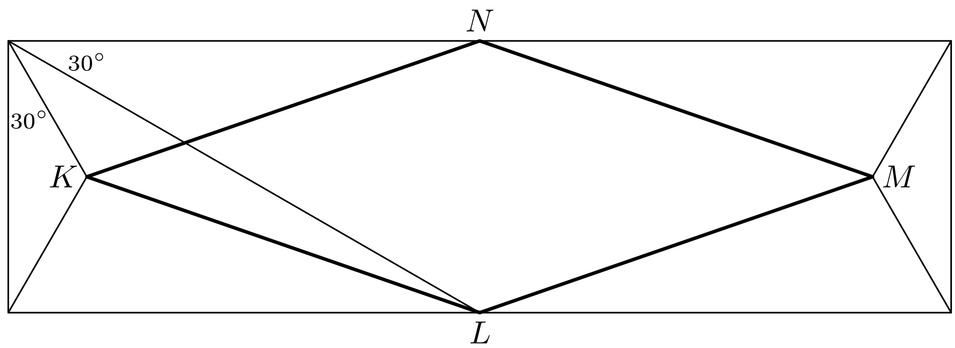
kde $*$ je sudé číslo. Vidíme, že číslo

$$120\,030$$

je moderní a je nejmenší možné.

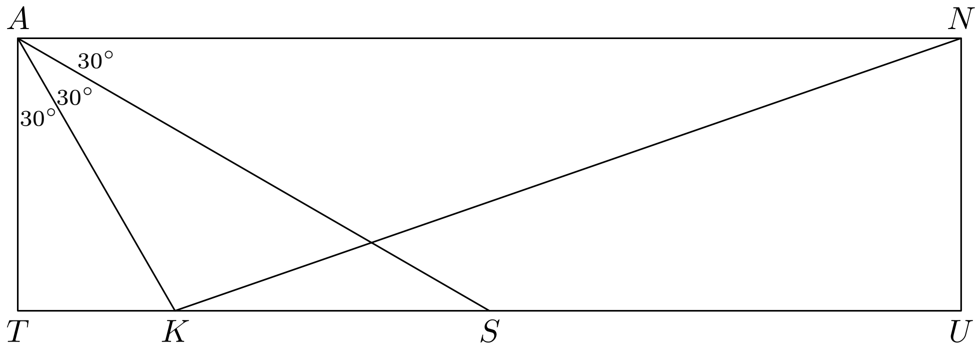
Z9–II–4

Jakou částí obsahu obdélníka je kosočtverec $KLMN$? (*Hozová*)



Řešení. Lze očekávat, že žáci budou postupovat různě. Využít lze goniometrických funkcí, Pythagorovy věty a vlastností trojúhelníků. Ukažme jeden možný postup.

Vzhledem k symetrii se omezíme na „horní levou" čtvrtinu obdélníka. Dostaneme tak následující obrázek.



Máme tedy určit, jakou část obdélníka $TUNA$ tvoří trojúhelník KUN. Bod S je střed úsečky TU. $\triangle ATS$ je „polovinou“ rovnostranného trojúhelníka (velikosti jeho vnitřních úhlů jsou 30°, 60°, 90°). Protože v každém rovnostranném trojúhelníku je každá těžnice zároveň výškou a navíc půlí vnitřní úhel trojúhelníka, je TS „těžnicí“ a AK „částí těžnice“. Bod K je „těžištěm“. Proto $|KS| = 2 \cdot |KT|$ a $|KU| = \frac{5}{6}|TU|$. Obsah trojúhelníka KUN je $\frac{5}{12}$ obsahu obdélníka $ATUN$. Kosočtverec $KLMN$ tedy zabírá $\frac{5}{12}$ plochy daného obdélníka.