55. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z5

1. *Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:*

$$\boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{+4} \boxed{} \xrightarrow{-3} \boxed{} \xrightarrow{:7} \boxed{}$$

$$\boxed{} \xrightarrow{\times 4} \boxed{} \xrightarrow{-2} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{+2} \boxed{}$$

$$\boxed{} \xrightarrow{+6} \boxed{} \xrightarrow{-2} \boxed{} \xrightarrow{-1} \boxed{} \xrightarrow{:4} \boxed{}$$

$$\boxed{} \xrightarrow{\times 5} \boxed{} \xrightarrow{-1} \boxed{} \xrightarrow{:7} \boxed{} \xrightarrow{\times 4} \boxed{}$$

ŘEŠENÍ. Začneme posledním řádkem. Ve třetím čtverečku musí být číslo dělitelné sedmi, tj. 7 nebo 14. Když zkusíme 7, dostaneme:

$$\boxed{} \xrightarrow{\times 5} \boxed{8} \xrightarrow{-1} \boxed{7} \xrightarrow{:7} \boxed{1} \xrightarrow{\times 4} \boxed{4}$$

Do prvního čtverečku nemáme co doplnit. Vyhovuje tedy číslo 14 a poslední řádek bude:

$$\boxed{3} \xrightarrow{\times 5} \boxed{15} \xrightarrow{-1} \boxed{14} \xrightarrow{:7} \boxed{2} \xrightarrow{\times 4} \boxed{8}$$

Nyní si všimneme prvního řádku. Ve čtvrtém čtverečku musí být číslo dělitelné sedmi (7 nebo 14), ale 14 je již v posledním řádku, takže doplníme číslo 7. Odtud doplníme celý řádek:

$$\boxed{12} \xrightarrow{:2} \boxed{6} \xrightarrow{+4} \boxed{10} \xrightarrow{-3} \boxed{7} \xrightarrow{:7} \boxed{1}$$

Pokračujeme druhým řádkem. V prvním čtverečku nemůže být číslo větší než 5, čísla 1, 2, 3 jsou již použita, takže tam může být 4 nebo 5. Nevyhovuje však 4 (ve třetím čtverečku by se opakovalo číslo 14), takže doplníme číslo 5. Celý řádek bude vypadat takto:

$$\boxed{5} \xrightarrow{\times 4} \boxed{20} \xrightarrow{-2} \boxed{18} \xrightarrow{:2} \boxed{9} \xrightarrow{+2} \boxed{11}$$

Zbývá nám třetí řádek. Ve čtvrtém čtverečku musí být číslo dělitelné čtyřmi, které není dosud použité, tj. 4 nebo 16. Z nich vyhovuje jen 16 (číslo 4 by vedlo ke sporu v pátém čtverečku, protože číslo 1 je už použité). Použitím čísla 16 doplníme celý řádek:

$$\boxed{13} \xrightarrow{+6} \boxed{19} \xrightarrow{-\,2} \boxed{17} \xrightarrow{-\,1} \boxed{16} \xrightarrow{:\,4} \boxed{4}$$

Celkové řešení:

$$\boxed{12} \xrightarrow{:\,2} \boxed{6} \xrightarrow{+\,4} \boxed{10} \xrightarrow{-\,3} \boxed{7} \xrightarrow{:\,7} \boxed{1}$$

$$\boxed{5} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{20} \xrightarrow{-\,2} \boxed{18} \xrightarrow{:\,2} \boxed{9} \xrightarrow{+\,2} \boxed{11}$$

$$\boxed{13} \xrightarrow{+6} \boxed{19} \xrightarrow{-\,2} \boxed{17} \xrightarrow{-\,1} \boxed{16} \xrightarrow{:\,4} \boxed{4}$$

$$\boxed{3} \xrightarrow{\times\,5} \boxed{15} \xrightarrow{-\,1} \boxed{14} \xrightarrow{:\,7} \boxed{2} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{8}$$

2. *Blecha Skákalka skáče po číselné ose. Dokáže však jen dva druhy skoků. Jedním přeskočí o 14 čísel doprava nebo doleva, druhým přeskočí o 18 čísel doprava nebo doleva. Právě stojí na čísle 2.*

a) Najdi způsob, jak má blecha skákat, aby se dostala právě čtyřmi skoky na desítku.

b) Blecha tvrdí, že včera byla na třináctce. Mluví pravdu, nebo lže? Zdůvodni.

Řešení. (a) Skákalka se musí dostat o 8 čísel doleva. To znamená, že bude dělat krátké skoky směrem doprava a dlouhé skoky směrem doleva. Jeden možný způsob je:

$$2 \xrightarrow{18} 20 \xrightarrow{-14} 6 \xrightarrow{18} 24 \xrightarrow{-14} 10$$

(b) Protože blecha stojí na sudém čísle a mohla skákat jen o sudý počet čísel na obě strany, byla vždy jenom na sudém čísle. Na třináctce být nemohla.

3. *Pohádkový nafukovací čtverec, který umí mluvit, měl před 5 minutami délku strany 8 cm. Při každé lži zvětší svůj obvod dvojnásobně, při každé vyslovené pravdě se zmenší délka každé jeho strany o 2 cm. Za posledních 5 minut dvakrát lhal a dvakrát mluvil pravdu.*

a) Jaký největší obvod může teď mít?

b) Jaký nejmenší obvod může teď mít?

Řešení. Zkusíme vypočítat všechny obvody, jichž mohl čtverec dosáhnout:

$$\begin{array}{ll}
\text{LLPP} & (8\cdot 2\cdot 2-2-2)\cdot 4\,\text{cm}=112\,\text{cm},\\
\text{LPLP} & [(8\cdot 2-2)\cdot 2-2]\cdot 4\,\text{cm}=104\,\text{cm},\\
\text{LPPL} & (8\cdot 2-2-2)\cdot 2\cdot 4\,\text{cm}=96\,\text{cm},\\
\text{PLLP} & [(8-2)\cdot 2\cdot 2-2]\cdot 4\,\text{cm}=88\,\text{cm},\\
\text{PLPL} & [(8-2)\cdot 2-2]\cdot 2\cdot 4\,\text{cm}=80\,\text{cm},\\
\text{PPLL} & (8-2-2)\cdot 2\cdot 2\cdot 4\,\text{cm}=64\,\text{cm}.
\end{array}$$

(a) Největší možný obvod je 112 cm. (b) Nejmenší možný obvod je 64 cm.

4. *Pepa na pouti koupil čtyři autíčka — bílé, červené, zelené a modré. Bílé stálo dvakrát tolik co červené, zelené třikrát tolik co bílé a za modré zaplatil tolik, co za červené a bílé dohromady. Přitom červené stálo o 70 Kč méně než zelené. Kolik stála jednotlivá autíčka?*

Řešení. Jestliže bílé stojí dvakrát tolik, kolik červené a zelené třikrát tolik, kolik bílé, pak zelené stojí šestkrát tolik, kolik červené. Současně je zelené o 70 korun dražší nežli červené, takže 5 červených musí stát 70 korun. Odtud jedno červené stojí 14 korun. Zelené pak stojí 84 korun a bílé 28 korun. Za modré zaplatil tolik, kolik za červené a bílé dohromady, to jest 42 korun.

5. *Máma stonožka má dvě děti a manžela. Každý z nich má sto nohou a všichni si berou denně čisté ponožky. V sobotu ráno v 6:00 začala máma stonožka dávat špinavé ponožky do pračky. Najednou se jí do pračky vejde 357 ponožek. Tato jedna várka se vypere za dvě a půl hodiny. Zjisti, kdy skončí s praním, pokud víš, že ponožky pere jenom jednou za týden, uložení ponožek do pračky jí trvá 2 minuty a jejich vyndání 3 minuty.*

Řešení.

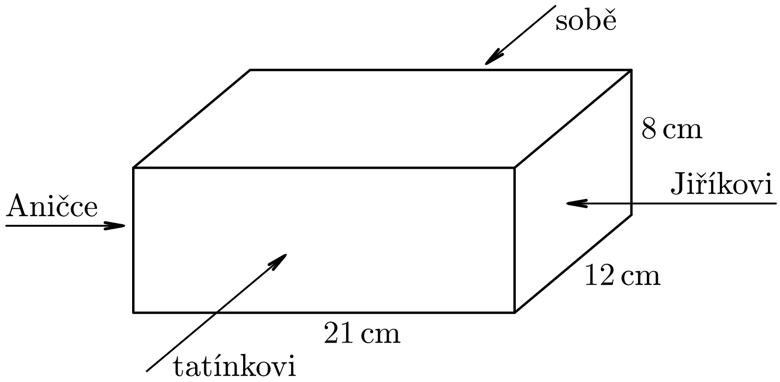
$$\begin{array}{lrl}
\text{Máma} & 100 & \\
\text{Děti} & 200 & \\
\text{Táta} & \underline{100} & \\
 & 400 & \text{ponožek denně,}
\end{array}$$

to je $400\cdot 7 = 2\,800$ ponožek týdně. Musíme zjistit, kolikrát máma pustila pračku. Vyjde $2\,800 : 357 = 7$, zbytek 301. Pračku pustí osmkrát, čili samotné praní bude trvat 20 hodin. Vkládání a výběr ponožek jí bude trvat $8\cdot(3+2) = 40$ minut, takže

$$6{:}00 + 20{:}40 = 26{:}40 = 24{:}00 + 2{:}40.$$

Maminka stonožka skončí s praním nejdříve v neděli ráno ve 2:40.

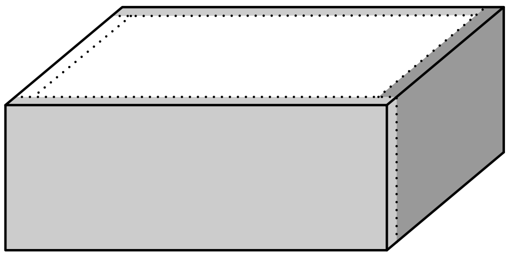
6. *Maminka má v lednici cihlu sýra, která je znázorněná na obrázku. Postupně z ní odřezává 1 cm silné plátky na smažení. Nejprve odřízla zepředu plátek s rozměry 21 cm, 8 cm, 1 cm pro tatínka. Pak z boku odřízla pro Jiříka, zezadu pro sebe a nakonec z druhého boku pro Aničku. Napiš, jaké rozměry mají jednotlivé plátky. Urči rozměry zbytku sýra.*



Řešení.

Tatínek	21 cm,	8 cm,	1 cm
Jiřík	11 cm,	8 cm,	1 cm
Maminka	20 cm,	8 cm,	1 cm
Anička	10 cm,	8 cm,	1 cm

Cihla po okrájení měla rozměry 19 cm, 10 cm a 8 cm:



55. ročník Matematické olympiády

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z6

1. *Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:*

$$\boxed{} \xrightarrow{:\,2} \boxed{} \xrightarrow{+\,4} \boxed{} \xrightarrow{-\,3} \boxed{} \xrightarrow{:\,7} \boxed{}$$

$$\boxed{} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{} \xrightarrow{-\,2} \boxed{} \xrightarrow{:\,2} \boxed{} \xrightarrow{+\,2} \boxed{}$$

$$\boxed{} \xrightarrow{+\,6} \boxed{} \xrightarrow{-\,2} \boxed{} \xrightarrow{-\,1} \boxed{} \xrightarrow{:\,4} \boxed{}$$

$$\boxed{} \xrightarrow{\times\,5} \boxed{} \xrightarrow{-\,1} \boxed{} \xrightarrow{:\,7} \boxed{} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{}$$

Řešení. Začneme posledním řádkem. Ve třetím čtverečku musí být číslo dělitelné sedmi, tj. 7 nebo 14. Když zkusíme 7, dostaneme:

$$\boxed{} \xrightarrow{\times\,5} \boxed{8} \xrightarrow{-\,1} \boxed{7} \xrightarrow{:\,7} \boxed{1} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{4}$$

Do prvního čtverečku nemáme co doplnit. Vyhovuje tedy číslo 14 a poslední řádek bude:

$$\boxed{3} \xrightarrow{\times\,5} \boxed{15} \xrightarrow{-\,1} \boxed{14} \xrightarrow{:\,7} \boxed{2} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{8}$$

Nyní si všimneme prvního řádku. Ve čtvrtém čtverečku musí být číslo dělitelné sedmi (7 nebo 14), ale 14 je již v posledním řádku, takže doplníme číslo 7. Odtud doplníme celý řádek:

$$\boxed{12} \xrightarrow{:\,2} \boxed{6} \xrightarrow{+\,4} \boxed{10} \xrightarrow{-\,3} \boxed{7} \xrightarrow{:\,7} \boxed{1}$$

Pokračujeme druhým řádkem. V prvním čtverečku nemůže být číslo větší než 5, čísla 1, 2, 3 jsou již použita, takže tam může být 4 nebo 5. Nevyhovuje však 4 (ve třetím čtverečku by se opakovalo číslo 14), takže doplníme číslo 5. Celý řádek bude vypadat takto:

$$\boxed{5} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{20} \xrightarrow{-\,2} \boxed{18} \xrightarrow{:\,2} \boxed{9} \xrightarrow{+\,2} \boxed{11}$$

Zbývá nám třetí řádek. Ve čtvrtém čtverečku musí být číslo dělitelné čtyřmi, které není dosud použité, tj. 4 nebo 16. Z nich vyhovuje jen 16 (číslo 4 by vedlo ke sporu v pátém čtverečku, protože číslo 1 je už použité). Použitím čísla 16 doplníme celý řádek:

$$\boxed{13} \xrightarrow{+6} \boxed{19} \xrightarrow{-\,2} \boxed{17} \xrightarrow{-\,1} \boxed{16} \xrightarrow{:\,4} \boxed{4}$$

Celkové řešení:

$$\boxed{12} \xrightarrow{:\,2} \boxed{6} \xrightarrow{+\,4} \boxed{10} \xrightarrow{-\,3} \boxed{7} \xrightarrow{:\,7} \boxed{1}$$

$$\boxed{5} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{20} \xrightarrow{-\,2} \boxed{18} \xrightarrow{:\,2} \boxed{9} \xrightarrow{+\,2} \boxed{11}$$

$$\boxed{13} \xrightarrow{+6} \boxed{19} \xrightarrow{-\,2} \boxed{17} \xrightarrow{-\,1} \boxed{16} \xrightarrow{:\,4} \boxed{4}$$

$$\boxed{3} \xrightarrow{\times\,5} \boxed{15} \xrightarrow{-\,1} \boxed{14} \xrightarrow{:\,7} \boxed{2} \xrightarrow{\times\,4} \boxed{8}$$

2. *Sněhurka se sedmi trpaslíky sbírala lískové oříšky. Měla jich tolik, kolik všichni trpaslíci dohromady. Když se vraceli, potkali veverku Loudilku. Sněhurka i každý trpaslík jí dali stejný počet oříšků. Když pak trpaslíci a Sněhurka vysypali zbylé oříšky na stůl, zapsal Prófa jejich počty: 120, 316, 202, 185, 333, 297, 111 a 1 672. Kolik oříšků dostala veverka Loudilka?*

Řešení. Veverka dostala od každého x oříšků, takže

$$\begin{aligned} 120 + 316 + 202 + 185 + 333 + 297 + 111 + 7x &= 1\,672 + x,\\ 1564 + 7x &= 1\,672 + x,\\ 6x &= 108,\\ x &= 18. \end{aligned}$$

Veverka dostala od každého trpaslíka i od Sněhurky 18 oříšků, celkem dostala 144 oříšky.

3. *Když jsme čísla 80 a 139 vydělili stejným přirozeným číslem, získali jsme zbytky 8 a 13. Jakým číslem jsme dělili?*

Řešení. Hledané číslo musí být větší než zbytek 13. Kdybychom hledaným číslem dělili čísla $(80 - 8)$ a $(139 - 13)$, vyšlo by dělení beze zbytku. Jde tedy o čísla 72 a 126. Obě čísla mají společné dělitele 1, 2, 3, 6, 9, 18, z nichž je větší než 13 pouze číslo 18:

$$80 : 18 = 4 \text{ (zb. 8)}.$$
$$139 : 18 = 7 \text{ (zb. 13)}.$$

(Snadno se ukáže, že společný dělitel čísel $(80-13)$ a $(139-8)$ nevyhovuje zadání úlohy.)

4. *Obvod trojúhelníku je 16 cm. Jak dlouhé může mít strany, když jsou to v centimetrech přirozená čísla a součet délek dvou stran je o 6 cm větší než délka třetí strany?*

Řešení. Trojúhelník má strany v centimetrech dány přirozenými čísly a, b, c. Označení a, b můžeme zvolit tak, aby platilo $a \leqq b$. Platí:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 16, \\ a + b &= c + 6. \end{aligned}$$

Dosazením z druhé rovnice do první dostaneme

$$\begin{aligned} (c + 6) + c &= 16, \\ 2c + 6 &= 16, \\ 2c &= 10, \\ c &= 5. \end{aligned}$$

Je $c = 5$, pak $a + b = 11$. Jsou tyto možnosti:

a	b	c	trojúhelníková nerovnost
1	10	5	neplatí
2	9	5	neplatí
3	8	5	neplatí
4	7	5	platí
5	6	5	platí

Úloha má 2 řešení: Strany trojúhelníku měří 4 cm, 5 cm, 7 cm nebo 5 cm, 5 cm, 6 cm.

5. *Maruška dostala pět různě těžkých koláčů. Průměrná hmotnost jednoho koláče byla 200 gramů. Maruška jeden koláč snědla a průměrná hmotnost zbylých koláčů pak byla 160 gramů. Jakou hmotnost měl koláč, který Maruška snědla?*

Řešení. Označíme hmotnosti koláčů a, b, c, d, e gramů. Průměrná hmotnost je

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 200,$$

tj.

$$a + b + c + d + e = 1\,000.$$

Předpokládejme, že Maruška snědla koláč hmotnosti e gramů. Pro zbývající koláče platí

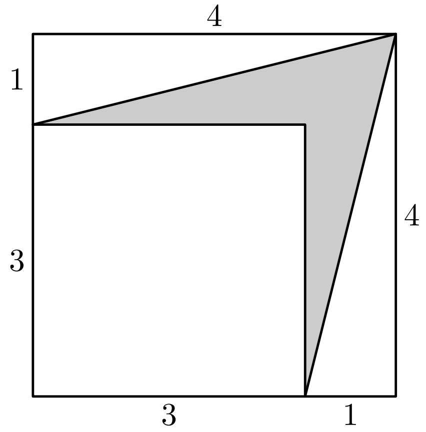
$$\frac{a + b + c + d}{4} = 160,$$

tj.

$$a + b + c + d = 640.$$

Protože $1\,000 - 640 = 360$, měl snědený koláč hmotnost 360 g.

6. *Urči obsah šedé plochy vyplňující část útvaru mezi dvěma čtverci (rozměry na obrázku jsou v centimetrech).*



Řešení. Počítejme bez jednotek cm a cm^2. Označme S_1 obsah velkého čtverce (obr.):

$$S_1 = 4^2 = 16,$$

S_2 obsah malého čtverce:

$$S_2 = 3^2 = 9,$$

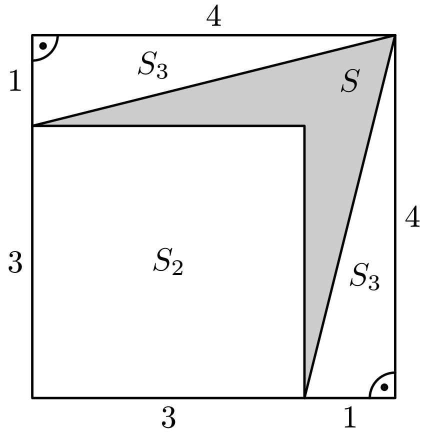
S_3 obsah pravoúhlého trojúhelníku:

$$S_3 = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$$

(v obrázku jsou dva takové shodné trojúhelníky), S obsah šedé plochy:

$$S = S_1 - S_2 - 2S_3 = 16 - 9 - 2 \cdot 2 = 16 - 9 - 4 = 3.$$

Šedá plocha má obsah $3\,\text{cm}^2$.



Komentáře k domácímu kolu kategorie Z7

1. *Pat a Mat upravovali nový asfalt na cestě. Nejprve s válcem jeli 10 m dopředu, potom 7 m couvli. Pak opět popojeli 10 m dopředu a 7 m couvli atd. Takto pokračovali, než poprvé sjeli z nového asfaltu.*

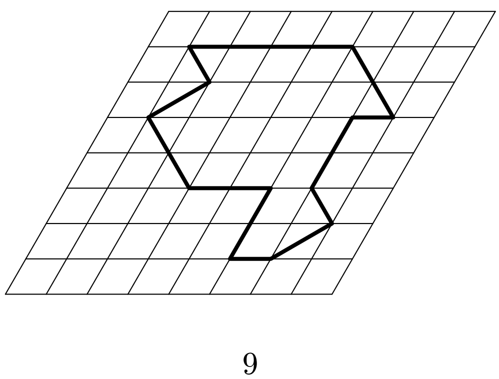
a) Kolik metrů ujeli na novém 540 m dlouhém úseku cesty?

b) Kolikrát přejeli po 19. metru nového asfaltu?

Řešení. a) Na jeden cyklus vpřed-vzad se válec posune o 3 metry dopředu a ujede přitom 17 metrů. Na 540 metrový úsek by takto připadlo $540 : 3 = 180$ cyklů. Na konec 540 metrů dlouhého úseku však válec poprvé dorazí už dříve: Po 175 cyklech je totiž na 525. metru, při posunutí o 10 m dopředu se dostane až na 535. metr, potom se vrací zpět na 528., dále jede dopředu na 538., zpět na 531. metr a už mu stačí jen 9 metrů dopředu, aby sjel z čerstvého asfaltu. To máme 177 celých cyklů a ještě 9 m vpřed, tedy celkem $177 \cdot 17\,m + 9\,m = 3\,018$ m, které válec najezdil po 540 metrů dlouhém úseku nového asfaltu.

b) Poprvé se směrem dopředu dostane válec do vzdálenosti 10 metrů, potom se vrací zpět do vzdálenosti 3 metry od začátku, jede vpřed až do vzdálenosti 13 metrů, vrací se zpět do vzdálenosti 6 metrů od začátku, jede vpřed až do vzdálenosti 16 metrů, vrací se zpět do vzdálenosti 9 metrů od začátku, jede vpřed až do vzdálenosti 19 metrů, (teď byl na 19. metru poprvé), vrací se zpět do vzdálenosti 12 metrů od začátku (cestou podruhé přejede přes 19. metr), jede vpřed až do vzdálenosti 22 metrů (potřetí přejede přes 19. metr), vrací se zpět do vzdálenosti 15 metrů od začátku (počtvrté přejede přes 19. metr), jede vpřed až do 25 metrů (popáté přejede přes 19. metr), vrací se zpět do vzdálenosti 18 metrů od začátku (přejede přes 19. metr pošesté), jede vpřed až do vzdálenosti 28 metrů (přejede přes 19. metr posedmé), vrací se zpět do vzdálenosti 21 metrů od začátku… Při dalším ježdění se už na 19. metr nedostane, celkem se tedy na 19. metru vyskytoval sedmkrát.

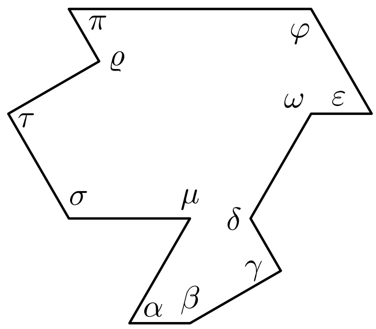
2. *Zjisti obsah a velikosti vnitřních úhlů mnohoúhelníku znázorněného v kosočtvercové síti na obrázku, jestliže víš, že přímky sítě svírají úhel 80° a jeden malý kosočtvereček má obsah 1 cm². (Pozor, obrázek je nepřesný!)*



Řešení. Nejprve zjistíme počet celých kosočtverců obsažených v mnohoúhelníku: těch je 16. Kromě nich se tam vyskytují trojúhelníky, které jsou „polovinami“ malých kosočtverců. Takových trojúhelníků je celkem 8. Obsah mnohoúhelníku je tedy

$$16 \cdot 1\,\mathrm{cm}^2 + 8 \cdot 0{,}5\,\mathrm{cm}^2 = 20\,\mathrm{cm}^2.$$

Vnitřní úhly mnohoúhelníku si označíme jako na obrázku.

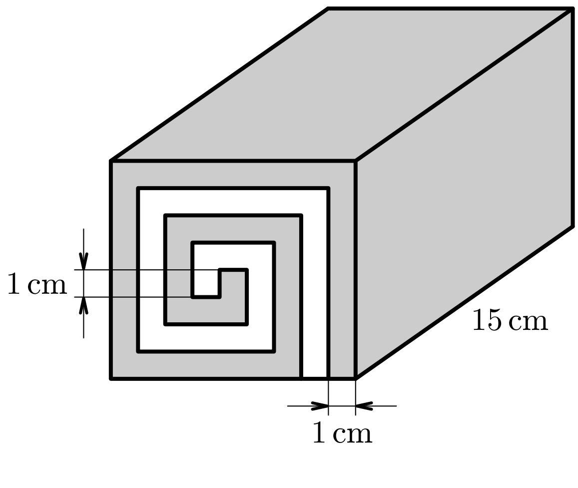


Přímky sítě svírají úhel 80°, tedy $\alpha = 80°$. Dále využijeme skutečnosti, že úhlopříčky kosočtverce jsou současně i osami jeho vnitřních úhlů a tedy je dělí na dvě stejné části, proto $\beta = 180° - 80° + 80° : 2 = 140°$. Úhlopříčky v kosočtverci jsou navzájem kolmé, tedy $\gamma = 90°$. Takto postupně dopočítáme všechny vnitřní úhly $\delta = 180° + 100° : 2 = 230°$, $\omega = 360° - 100° = 260°$, $\varepsilon = 100° : 2 = 50°$, $\varphi = 80° + 50° = 130°$, $\pi = 50°$, $\varrho = 360° - 90° = 270°$, $\tau = 90°$, $\sigma = 50° + 80° = 130°$, $\mu = 360° - 80° = 280°$.

3. *Na obrázku vidíš tzv.* kvadroládu *(speciální druh rolády). Je vyrobena z bílé a hnědé marcipánové hmoty, přičemž obě hmoty mají stejnou tloušťku, a to 1 cm. Celá kvadroláda má délku 15 cm. Prodává se rozkrájená na 10 shodných plátků. Zjisti*

a) rozměry jednoho plátku,

b) kolik gramů hnědé hmoty a kolik gramů bílé hmoty je třeba na její přípravu, jestliže víš, že 1 cm^3 *marcipánu má hmotnost 2 gramy.*



Řešení. a) Rozměry jednoho kousku rolády (dle obrázku) jsou 9 cm, 8 cm, jeho tloušťka je 15 cm : 10 = 1,5 cm.

b) Hnědá hmota: Z řezu určíme hnědou plochu:

$$1 \cdot (8+8+7+6+5+4+3+2+1) = 44\,\mathrm{cm}^2.$$

Délka rolády je 15 cm, tedy objem hnědé hmoty je

$$V_H = 44 \cdot 15 = 660\,\mathrm{cm}^3$$

a hmotnost

$$m_H = V_H \cdot \varrho = 660 \cdot 2 = 1\,320\,\mathrm{g}.$$

Bílá hmota: Z řezu určíme bílou plochu:

$$1 \cdot (7+6+5+4+3+2+1) = 28\,\mathrm{cm}^2.$$

Délka rolády je 15 cm, tedy objem bílé hmoty je

$$V_B = 28 \cdot 15 = 420\,\mathrm{cm}^3$$

a hmotnost

$$m_B = V_B \cdot \varrho = 420 \cdot 2 = 840\,\mathrm{g}.$$

4. *Najdi všechna pětimístná přirozená čísla, která se škrtnutím první a poslední číslice zmenší 250krát.*

Řešení. Z podmínky „původní číslo se škrtnutím první a poslední číslice zmenší 250krát“ vyplývá, že původní číslo musí být beze zbytku dělitelné číslem 250, tedy musí končit některým z následujících trojčíslí: 000, 250, 500 nebo 750. Po škrtnutí první a poslední číslice dostaneme tedy trojmístné číslo typu $*00$, $*25$, $*50$ nebo $*75$. Protože největší pětimístné číslo je 99 999 a $99\,999 : 250 < 400$, může se na místě $*$ vyskytovat pouze 0, 1, 2 nebo 3. Zbývá tedy ověřit následujících 16 možností:

$$\begin{array}{ll}
000 \cdot 250 = 0 & 200 \cdot 250 = 50\,000 \\
025 \cdot 250 = 6\,250 & 225 \cdot 250 = 56\,250 \\
050 \cdot 250 = 12\,500 & 250 \cdot 250 = 62\,500 \\
075 \cdot 250 = 18\,750 & 275 \cdot 250 = 68\,750 \\
100 \cdot 250 = 25\,000 & 300 \cdot 250 = 75\,000 \\
125 \cdot 250 = 31\,250 & 325 \cdot 250 = 81\,250 \\
150 \cdot 250 = 37\,500 & 350 \cdot 250 = 87\,500 \\
175 \cdot 250 = 43\,750 & 375 \cdot 250 = 93\,750
\end{array}$$

První dvě čísla jsou moc malá, z dalších vyhovují podmínkám úlohy jen $125 \cdot 250 = 31\,250$, $250 \cdot 250 = 62\,500$ a $375 \cdot 250 = 93\,750$, tedy existují jen tři pětimístná čísla požadovaných vlastností, a to 31 250, 62 500 a 93 750.

5. *Pavel měl za domácí úkol vyjádřit desetinnými čísly zlomky $\frac{3}{7}$ a $\frac{7}{13}$. Chtěl udělat paní učitelce radost a místo do sešitu psal na laťky školního plotu. Nejprve vyjadřoval $\frac{3}{7}$, takže nahoru na první laťku napsal nulu, na druhou desetinnou čárku, na třetí 4. Takto pokračoval, dokud nenapsal číslici na poslední laťku. Potom vyjadřoval $\frac{7}{13}$. Na první laťku dolů napsal nulu, na druhou desetinnou čárku, na třetí 5 atd. Kolik bylo v plotě latěk, víš-li, že číslici 5 napsal přesně 667krát a že na 668 laťkách byla dvojice stejných číslic?*

Řešení. Postupným dělením lze přijít na to, že $\frac{3}{7}$ lze vyjádřit jako periodické desetinné číslo $0{,}\overline{428\,571}$ a $\frac{7}{13}$ jako periodické desetinné číslo $0{,}\overline{538\,461}$. Podívejme se, jak bude vypadat několik prvních latěk, které Pavel popsal:

laťka číslo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
nahoře	0	,	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5	7	1	4
dole	0	,	5	3	8	4	6	1	5	3	8	4	6	1	5

Vidíme, že obsah latěk se pravidelně po šesti opakuje. Není to náhoda — tento fakt vyplývá z toho, že oba zlomky vyjádřené jako desetinné čísla mají periodu stejné délky (6) a stejný počet míst před desetinnou čárkou. Víme, že Pavel 667krát napsal číslici 5. V jednom „cyklu“ jsou dvě pětky, musel tedy napsat 333 celých cyklů a jeden cyklus neúplný (na 1, 2 nebo 3 laťky).

$$2 + 333 \cdot 6 = 2000.$$

Latěk mohlo být 2 001, 2 002 nebo 2 003, podle toho zda při psaní skončil na laťce s čísly 4/5, 2/3 resp. 8/8. (Na 5/4 už skončit nemohl — to by napsal 668krát pětku.) Dále víme, že na 668 laťkách byla napsaná dvojice stejných čísel, tedy kromě první laťky s čísly 0/0 ještě na 667 dalších. V jednom cyklu jsou dvě takové dvojice 8/8 a 1/1, to znamená 333 celých cyklů a jeden „necelý“, tedy latěk muselo být $2+333\cdot 6+3 = 2\,003$, $2+333\cdot 6+4 = 2\,004$ nebo $2+333\cdot 6+5 = 2\,005$. Protože z první podmínky vyplynulo, že latěk bylo 2 001, 2 002 a nebo 2 003, a z druhé, že jich bylo 2 003, 2 004 nebo 2 005, muselo jich být 2 003.

6. *V Kocourkově jsou dvě směnárny. V současnosti mají tyto kurzy:*

1. směnárna

	Nakupujeme	*Prodáváme*
1 euro	*123 Kk*	*132 Kk*

2. směnárna

	Nakupujeme	*Prodáváme*
1 euro	*134 Kk*	*143 Kk*

Slávek Mazaný měl několik eur. V druhé směnárně je vyměnil za kocourkovské koruny a ty potom vyměnil v první směnárně zpět za eura. Takto vydělal 1 euro. Kolik eur měl původně?

Řešení. Za x eur dostal Slávek $134x$ Kk, za ně zase $\frac{134}{132}x$ eur. Z rovnice

$$\frac{134x}{132} = x + 1$$

plyne, že $x = 66$.

Na začátku měl Slávek 66 eur.

55. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z8

1. *Součin ciferného součinu a ciferného součtu dvojmístného přirozeného čísla je 126. Které číslo to je? Najděte všechna možná řešení.*

ŘEŠENÍ. Z rozkladu $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ a z podmínky, že ciferný součin dvojmístného čísla dělí 126, určíme možné dvojice číslic takového čísla. Pro každou dvojici proveďme zkoušku, zda čísla mohou být číslicemi hledaného čísla:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 \cdot (1+1) &\neq 126\\
1 \cdot 2 \cdot (1+2) &\neq 126\\
1 \cdot 3 \cdot (1+3) &\neq 126\\
1 \cdot 6 \cdot (1+6) &\neq 126\\
1 \cdot 7 \cdot (1+7) &\neq 126\\
1 \cdot 9 \cdot (1+9) &\neq 126\\
2 \cdot 3 \cdot (2+3) &\neq 126\\
2 \cdot 7 \cdot (2+7) &= 126 \ldots \text{ vyhovuje}\\
2 \cdot 9 \cdot (2+9) &\neq 126\\
3 \cdot 7 \cdot (3+7) &\neq 126\\
6 \cdot 7 \cdot (6+7) &\neq 126\\
7 \cdot 9 \cdot (7+9) &\neq 126
\end{aligned}$$

Jde o čísla 27 nebo 72.

2. *Paní Zručná se ucházela o místo v perníkárně. Při pohovoru s vedoucím chtěla říci, za kolik minut ozdobí kolik perníků. Byla nervózní, a proto omylem prohodila počet minut s počtem perníků. Vedoucí podle vyslechnutých údajů spočítal, kolik perníků by měla paní Zručná stihnout ozdobit za pětihodinovou pracovní dobu, a tolik jí dal úkolem. Paní Zručné však trvala práce o 2 hodiny a 12 minut déle. Kolik perníků ozdobila?*

ŘEŠENÍ. Zručná omylem nahlásila za p minut m perníků. Vedoucí tedy vypočítal, že za 1 minutu ozdobí m/p perníků, za 5 hodin (300 minut) ozdobí $300m/p$ perníků. Ve skutečnosti Zručná udělá p perníků za m minut, tj. 1 perník za m/p minut. Výše stanovených $300m/p$ perníků by zdobila

$$\frac{300m}{p} \cdot \frac{m}{p} = \frac{300m^2}{p^2} \text{ minut}$$

a trvalo jí to 432 minut, tedy

$$\begin{aligned}
\frac{300m^2}{p^2} &= 432,\\
m^2 &= 1{,}44p^2,\\
m &= 1{,}2p.
\end{aligned}$$

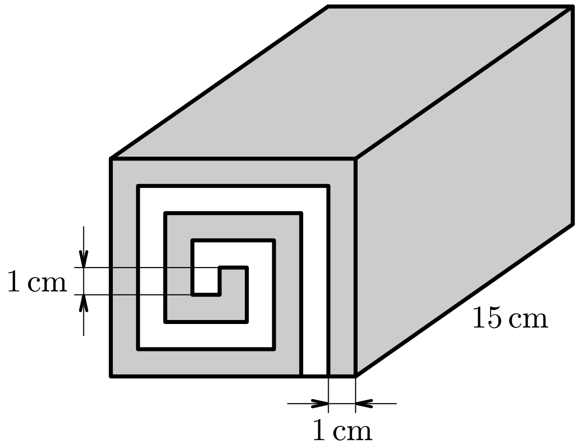
Počet perníků, které paní Zručná ozdobila:

$$\frac{300m}{p} = \frac{300 \cdot 1{,}2p}{p} = 360.$$

3. *Na obrázku vidíš tzv.* kvadroládu *(speciální druh rolády). Je vyrobena z bílé a hnědé marcipánové hmoty, přičemž obě hmoty mají stejnou tloušťku, a to 1 cm. Celá kvadroláda má délku 15 cm. Prodává se rozkrájená na 10 shodných plátků. Zjisti*

a) rozměry jednoho plátku,

b) kolik gramů hnědé hmoty a kolik gramů bílé hmoty je třeba na její přípravu, jestliže víš, že 1 cm^3 marcipánu má hmotnost 2 gramy.



4. *Roman psal na list papíru celá čísla do řady tak, že každé následující získával z předchozího střídavě násobením dvěma a odečítáním tří. (Např. řada čísel 1, 2, −1, −2, −5, −10 vyhovuje jeho pravidlu, ale řada 10, 7, 4, 8, 16, 32 jeho pravidlo nesplňuje.) Po chvíli sečetl posledních 5 čísel, která napsal, a vyšlo mu 114. Kterých pět čísel napsal naposledy?*

Řešení. První z posledních pěti čísel označíme a. Potom jsou dvě možnosti, jak může řada pokračovat:

a) $2a$:

$$\begin{aligned} a + 2a + (2a-3) + (4a-6) + (4a-9) &= 114, \\ 13a &= 132. \end{aligned}$$

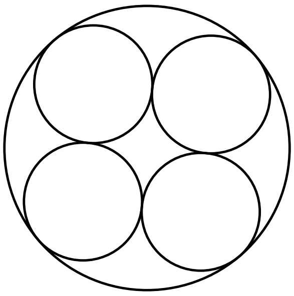
Rovnice nemá řešení v oboru celých čísel.

b) $a - 3$:

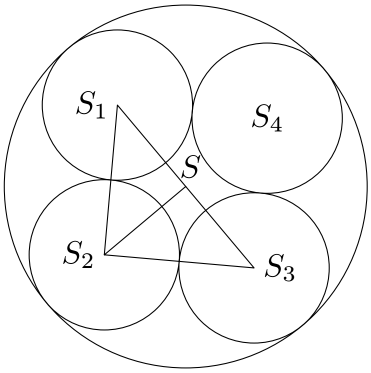
$$\begin{aligned} a + (a-3) + (2a-6) + (2a-9) + (4a-18) &= 114, \\ 10a &= 150, \\ a &= 15. \end{aligned}$$

Posledních pět napsaných čísel bylo po řadě 15, 12, 24, 21, 42.

5. *Určete poloměr větší kružnice, víte-li, že malé kružnice mají poloměr 1 cm (kružnice mají celkem osm vzájemných dotyků).*



ŘEŠENÍ. Označíme podle obr. středy malých kružnic S_1, S_2, S_3, S_4 a S střed velké kružnice. Trojúhelník $S_1S_2S_3$ je rovnoramenný pravoúhlý s odvěsnami délky 2 cm. Z Pythagorovy věty je $|S_1S_3| = 2\sqrt{2}$ cm, pak $|SS_1| = \sqrt{2}$ cm a poloměr velké kružnice je $(1+\sqrt{2})$ cm.



6. *Žák Pažout měl v loňském ročníku průměr všech známek 4,15. Z nich byly pouze čtyři jedničky, zato právě jedna třetina byly pětky. Kolik známek musel Pažout minimálně dostat?*

ŘEŠENÍ. Pro aritmetický průměr platí:

$$\frac{\text{součet známek}}{\text{počet známek}} = 4{,}15,$$

$$\text{součet známek} = 4{,}15 \cdot \text{počet známek} = \frac{83}{20} \cdot \text{počet známek},$$

z toho plyne, že počet známek je násobek dvaceti. Protože třetina známek byly pětky, musí být počet známek rovněž násobkem čísla 3.

Počet známek je tedy násobkem čísla 60.

a) Kdyby měl Pažout 60 známek, bylo by

$$60 \cdot 4{,}15 = 249.$$

Odečteme-li 4 jedničky a 20 pětek (tj. 104), zbývá 145 na 36 známek. I kdyby to byly samé čtyřky, bylo by to méně než 145 ($36 \cdot 4 = 144$).

b) Kdyby měl Pažout 120 známek:

$$120 \cdot 4{,}15 = 498.$$

Odečteme-li 4 jedničky a 40 pětek, zbyde 294 na 76 známek. To lze splnit ($294 : 76 \doteq 3{,}9$), např. 10 trojek a 66 čtyřek.

Žák Pažout musel letos dostat minimálně 120 známek.

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z9

1. *Určete počet přirozených čísel od 100 do 999, která mají právě dvě stejné číslice.*

Řešení. Příklad je možné řešit více způsoby např:

1. Počet čísel, která mají právě dvě stejné číslice a neobsahují nulu: $9 \cdot 8 \cdot 3 = 216$.

Počet čísel, která obsahují právě 1 nulu (jsou tvaru 110, 220, ..., 101, 202, ...): $2 \cdot 9 = 18$.

Počet čísel, která obsahují právě dvě nuly (jsou tvaru 100, 200, ...): 9.

Celkem: $216 + 18 + 9 = 243$.

2. Počet všech trojciferných čísel: 900.

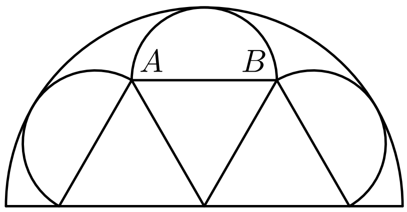
Počet čísel, která mají každou cifru jinou: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Počet čísel, která mají všechny cifry stejné: 9.

Výsledek: $900 - 648 - 9 = 243$.

Čísel s touto vlastností je celkem 243.

2. *Na obrázku jsou tři rovnostranné trojúhelníky, tři malé polokružnice dotýkající se jedné velké polokružnice o poloměru 1 dm. Určete délku úsečky AB.*



Řešení. Trojúhelníky jsou rovnostranné, jejich stranu označme a. Jejich výška je $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ (obr). Poloměr malých polokružnic je $\frac{1}{2}a$.

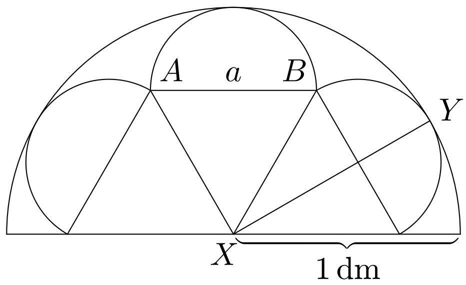
$$|XY| = 1\,\mathrm{dm},$$

$$|XY| = \frac{1}{2}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a,$$

$$\frac{1}{2}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a = 1\,\mathrm{dm}.$$

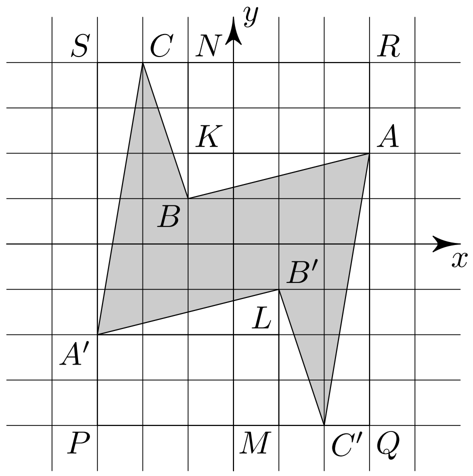
Odtud

$$a = \frac{2}{1+\sqrt{3}}\,\mathrm{dm} \doteq 0{,}732\,\mathrm{dm}.$$



3. *V soustavě souřadnic jsme znázornili body $A[3,2]$, $B[-1,1]$, $C[-2,4]$ a jejich obrazy A', B', C' ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic. Vypočítejte obsah šestiúhelníku $ABCA'B'C'$.*

Řešení. Můžeme postupovat různými způsoby, např. následovně.
Vyjdeme z obdélníku $PQRS$ (obr.). Od jeho obsahu budeme postupně odčítat



obsahy dalších obrazců:

$$\begin{array}{lcl}
S_{PQRS} & = & \qquad = 48, \\ \hline
S_{\triangle C'QA} & = S_{\triangle CSA'} = & 3, \\
S_{\triangle MC'B'} & = S_{\triangle NCB} = & 1{,}5, \\
S_{\triangle A'LB'} & = S_{\triangle AKB} = & 2, \\
S_{PMLA'} & = S_{RNKA} = & 8. \\ \hline
\end{array}$$

Je tedy $S_{ABCA'B'C'} = 48 - 2 \cdot (3 + 1{,}5 + 2 + 8) = 19$.
Obsah šestiúhelníku $ABCA'B'C'$ je 19.

4. *Starý podnikatel zemřel a zanechal po sobě dva bankovní účty, jeden dluh a závěť. V závěti je psáno, že peníze z prvního účtu si mají rozdělit první a druhý syn v poměru 1 : 2, peníze z druhého účtu první a třetí syn v poměru 1 : 3 a dluh mají zaplatit druhý a třetí syn v poměru 2 : 3. Zjistěte, kolik korun bylo na prvním, kolik na druhém účtu a jaký dluh museli synové zaplatit, víte-li, že v konečném důsledku každý z nich získal 123 456 korun.*

Řešení. Částky, které si synové rozdělili, označíme takto (počítáme v korunách):

1. syn z 1. účtu … x,	2. syn z 1. účtu … $2x$,
1. syn z 2. účtu … y,	3. syn z 2. účtu … $3y$,
2. syn z dluhu … $2z$,	3. syn z dluhu … $3z$,

první syn dostal: $x + y = 123\,456$,
druhý syn dostal: $2x - 2z = 123\,456$,
třetí syn dostal: $3y - 3z = 123\,456$.

Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Vyjádříme x z první rovnice a dosadíme do druhé:

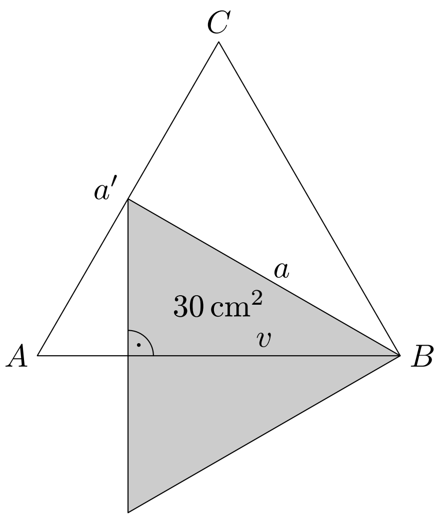
$$2y + 2z = 123\,456,$$
$$3y - 3z = 123\,456.$$

Jejím vyřešením dostáváme: $x = 72\,016$, $y = 51\,440$, $z = 10\,288$. Na prvním účtu bylo 216 048 Kč, na druhém 205 760 Kč a dluh činil 51 440 Kč.

5. *Dva rovnostranné papírové trojúhelníky, z nichž menší má obsah 60 cm^2, jsme položili přes sebe tak, že jejich průnikem byl pravoúhlý trojúhelník s obsahem 30 cm^2. Jaký nejmenší obsah mohl mít větší z rovnostranných trojúhelníků?*

Řešení. Polovina malého trojúhelníku leží přes velký trojúhelník.

Pravoúhlý trojúhelník vznikne, když výšku malého trojúhelníku položíme přes stranu velkého trojúhelníku. Větší trojúhelník bude mít nejmenší možný obsah, jestliže jeho strana bude procházet vrcholem menšího trojúhelníku (viz obrázek). Strana malého trojúhelníku je zároveň výškou velkého trojúhelníku. Délku strany velkého trojúhelníku,



malého trojúhelníku a výšku malého trojúhelníku označíme po řadě a', a, v.

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$
$$a' = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Obsah malého trojúhelníku:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2,$$
$$60 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

Obsah velkého trojúhelníku:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a'^2,$$
$$S' = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2\right) \cdot \frac{4}{3},$$
$$S' = 60 \cdot \frac{4}{3},$$
$$S' = 80\,(\mathrm{cm}^2).$$

Větší rovnostranný trojúhelník bude mít obsah minimálně $80\,\mathrm{cm}^2$.

6. *Prověrka obsahovala 26 otázek, jež byly rozděleny podle obtížnosti do tří skupin. V první byla každá správná odpověď hodnocena třemi body, ve druhé pěti body a ve třetí osmi body. Maximální počet bodů byl 111. Kolik otázek mohlo být v jednotlivých skupinách?*

Řešení. Počty otázek v první, druhé a třetí skupině označíme po řadě a, b, c. Ze zadání víme:

$$a + b + c = 26,$$
$$3a + 5b + 8c = 111.$$

Odečteme-li od druhé rovnice trojnásobek první rovnice, získáme rovnici

$$2b + 5c = 33, \tag{1}$$

a tedy

$$b = \frac{33 - 5c}{2}.$$

Aby bylo b přirozené číslo, musí být c liché a navíc $5c \leqq 33$, takže $c \in \{1, 3, 5\}$. Všechna možná řešení jsou uvedena v následující tabulce.

c	b	a
1	14	11
3	9	14
5	4	17

Jiné řešení se dostane k rovnici (1) následující úvahou: 26 otázek po třech bodech by dalo 78 bodů a zbylých 33 bodů musíme rozdělit po dvou na pětibodovou otázku a po pěti na osmibodovou otázku.