Komentáře k domácímu kolu kategorie Z8

1. *Součin ciferného součinu a ciferného součtu dvojmístného přirozeného čísla je 126. Které číslo to je? Najděte všechna možná řešení.*

Řešení. Z rozkladu $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ a z podmínky, že ciferný součin dvojmístného čísla dělí 126, určíme možné dvojice číslic takového čísla. Pro každou dvojici proveďme zkoušku, zda čísla mohou být číslicemi hledaného čísla:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 \cdot (1+1) &\neq 126 \\
1 \cdot 2 \cdot (1+2) &\neq 126 \\
1 \cdot 3 \cdot (1+3) &\neq 126 \\
1 \cdot 6 \cdot (1+6) &\neq 126 \\
1 \cdot 7 \cdot (1+7) &\neq 126 \\
1 \cdot 9 \cdot (1+9) &\neq 126 \\
2 \cdot 3 \cdot (2+3) &\neq 126 \\
2 \cdot 7 \cdot (2+7) &= 126 \ \ldots \text{ vyhovuje} \\
2 \cdot 9 \cdot (2+9) &\neq 126 \\
3 \cdot 7 \cdot (3+7) &\neq 126 \\
6 \cdot 7 \cdot (6+7) &\neq 126 \\
7 \cdot 9 \cdot (7+9) &\neq 126
\end{aligned}$$

Jde o čísla 27 nebo 72.

2. *Paní Zručná se ucházela o místo v perníkárně. Při pohovoru s vedoucím chtěla říci, za kolik minut ozdobí kolik perníků. Byla nervózní, a proto omylem prohodila počet minut s počtem perníků. Vedoucí podle vyslechnutých údajů spočítal, kolik perníků by měla paní Zručná stihnout ozdobit za pětihodinovou pracovní dobu, a tolik jí dal úkolem. Paní Zručné však trvala práce o 2 hodiny a 12 minut déle. Kolik perníků ozdobila?*

Řešení. Zručná omylem nahlásila za p minut m perníků. Vedoucí tedy vypočítal, že za 1 minutu ozdobí m/p perníků, za 5 hodin (300 minut) ozdobí $300m/p$ perníků. Ve skutečnosti Zručná udělá p perníků za m minut, tj. 1 perník za m/p minut. Výše stanovených $300m/p$ perníků by zdobila

$$\frac{300m}{p} \cdot \frac{m}{p} = \frac{300m^2}{p^2} \text{ minut}$$

a trvalo jí to 432 minut, tedy

$$\begin{aligned}
\frac{300m^2}{p^2} &= 432, \\
m^2 &= 1{,}44p^2, \\
m &= 1{,}2p.
\end{aligned}$$

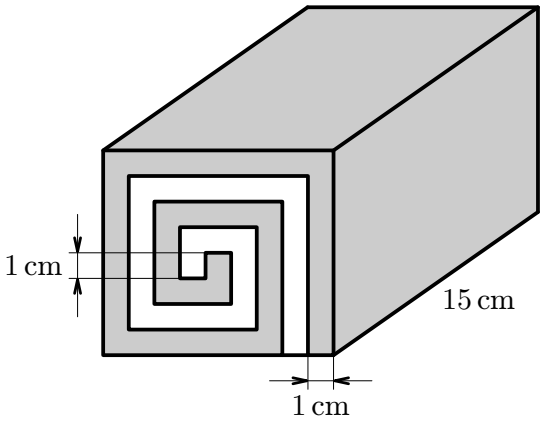
Počet perníků, které paní Zručná ozdobila:

$$\frac{300m}{p} = \frac{300 \cdot 1{,}2p}{p} = 360.$$

3. *Na obrázku vidíš tzv.* kvadroládu *(speciální druh rolády). Je vyrobena z bílé a hnědé marcipánové hmoty, přičemž obě hmoty mají stejnou tloušťku, a to 1 cm. Celá kvadroláda má délku 15 cm. Prodává se rozkrájená na 10 shodných plátků. Zjisti*

a) rozměry jednoho plátku,

b) kolik gramů hnědé hmoty a kolik gramů bílé hmoty je třeba na její přípravu, jestliže víš, že 1 cm^3 marcipánu má hmotnost 2 gramy.



4. *Roman psal na list papíru celá čísla do řady tak, že každé následující získával z předchozího střídavě násobením dvěma a odečítáním tří. (Např. řada čísel 1, 2, −1, −2, −5, −10 vyhovuje jeho pravidlu, ale řada 10, 7, 4, 8, 16, 32 jeho pravidlo nesplňuje.) Po chvíli sečetl posledních 5 čísel, která napsal, a vyšlo mu 114. Kterých pět čísel napsal naposledy?*

Řešení. První z posledních pěti čísel označíme a. Potom jsou dvě možnosti, jak může řada pokračovat:

a) $2a$:

$$\begin{aligned} a + 2a + (2a - 3) + (4a - 6) + (4a - 9) &= 114, \\ 13a &= 132. \end{aligned}$$

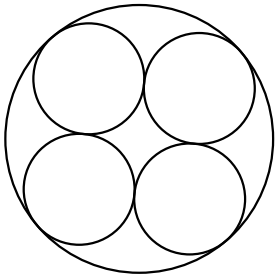
Rovnice nemá řešení v oboru celých čísel.

b) $a - 3$:

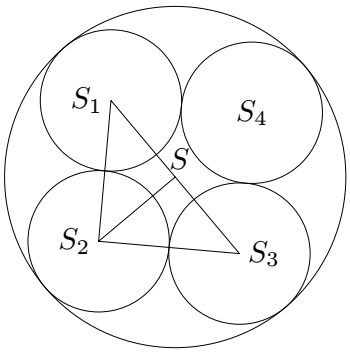
$$\begin{aligned} a + (a - 3) + (2a - 6) + (2a - 9) + (4a - 18) &= 114, \\ 10a &= 150, \\ a &= 15. \end{aligned}$$

Posledních pět napsaných čísel bylo po řadě 15, 12, 24, 21, 42.

5. *Určete poloměr větší kružnice, víte-li, že malé kružnice mají poloměr 1 cm (kružnice mají celkem osm vzájemných dotyků).*



Řešení. Označíme podle obr. středy malých kružnic S_1, S_2, S_3, S_4 a S střed velké kružnice. Trojúhelník $S_1S_2S_3$ je rovnoramenný pravoúhlý s odvěsnami délky 2 cm. Z Pythagorovy věty je $|S_1S_3| = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$, pak $|SS_1| = \sqrt{2}\,\text{cm}$ a poloměr velké kružnice je $(1+\sqrt{2})\,\text{cm}$.



6. *Žák Pažout měl v loňském ročníku průměr všech známek 4,15. Z nich byly pouze čtyři jedničky, zato právě jedna třetina byly pětky. Kolik známek musel Pažout minimálně dostat?*

Řešení. Pro aritmetický průměr platí:

$$\frac{\text{součet známek}}{\text{počet známek}} = 4{,}15,$$

$$\text{součet známek} = 4{,}15 \cdot \text{počet známek} = \frac{83}{20} \cdot \text{počet známek},$$

z toho plyne, že počet známek je násobek dvaceti. Protože třetina známek byly pětky, musí být počet známek rovněž násobkem čísla 3.

Počet známek je tedy násobkem čísla 60.

a) Kdyby měl Pažout 60 známek, bylo by

$$60 \cdot 4{,}15 = 249.$$

Odečteme-li 4 jedničky a 20 pětek (tj. 104), zbývá 145 na 36 známek. I kdyby to byly samé čtyřky, bylo by to méně než 145 ($36 \cdot 4 = 144$).

b) Kdyby měl Pažout 120 známek:

$$120 \cdot 4{,}15 = 498.$$

Odečteme-li 4 jedničky a 40 pětek, zbyde 294 na 76 známek. To lze splnit ($294 : 76 \doteq 3{,}9$), např. 10 trojek a 66 čtyřek.

Žák Pažout musel letos dostat minimálně 120 známek.