Komentáře k domácímu kolu kategorie Z9

1. *Určete počet přirozených čísel od 100 do 999, která mají právě dvě stejné číslice.*

Řešení. Příklad je možné řešit více způsoby např:

1. Počet čísel, která mají právě dvě stejné číslice a neobsahují nulu: $9 \cdot 8 \cdot 3 = 216$.

Počet čísel, která obsahují právě 1 nulu (jsou tvaru 110, 220, ..., 101, 202, ...): $2 \cdot 9 = 18$.

Počet čísel, která obsahují právě dvě nuly (jsou tvaru 100, 200, ...): 9.

Celkem: $216 + 18 + 9 = 243$.

2. Počet všech trojciferných čísel: 900.

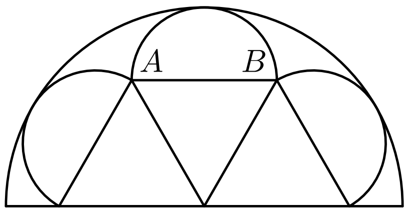
Počet čísel, která mají každou cifru jinou: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Počet čísel, která mají všechny cifry stejné: 9.

Výsledek: $900 - 648 - 9 = 243$.

Čísel s touto vlastností je celkem 243.

2. *Na obrázku jsou tři rovnostranné trojúhelníky, tři malé polokružnice dotýkající se jedné velké polokružnice o poloměru 1 dm. Určete délku úsečky AB.*

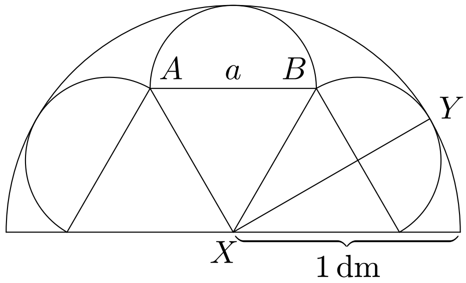


Řešení. Trojúhelníky jsou rovnostranné, jejich stranu označme a. Jejich výška je $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ (obr). Poloměr malých polokružnic je $\frac{1}{2}a$.

$$|XY| = 1\,\mathrm{dm},$$
$$|XY| = \frac{1}{2}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a,$$
$$\frac{1}{2}a\sqrt{3} + \frac{1}{2}a = 1\,\mathrm{dm}.$$

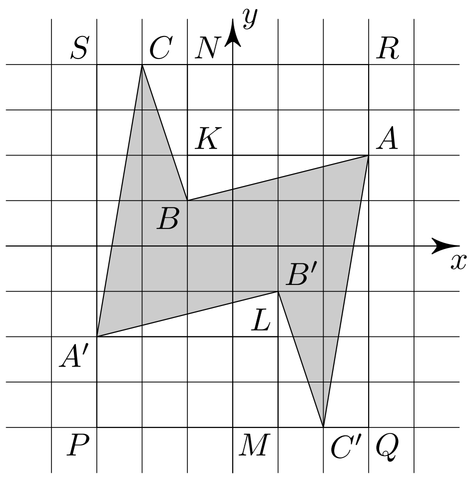
Odtud

$$a = \frac{2}{1+\sqrt{3}}\,\mathrm{dm} \doteq 0{,}732\,\mathrm{dm}.$$



3. *V soustavě souřadnic jsme znázornili body $A[3,2]$, $B[-1,1]$, $C[-2,4]$ a jejich obrazy A', B', C' ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic. Vypočítejte obsah šestiúhelníku $ABCA'B'C'$.*

Řešení. Můžeme postupovat různými způsoby, např. následovně.
Vyjdeme z obdélníku $PQRS$ (obr.). Od jeho obsahu budeme postupně odčítat



obsahy dalších obrazců:

$$
\begin{array}{lcl}
S_{PQRS} = & & = 48, \\
\hline
S_{\triangle C'QA} & = S_{\triangle CSA'} = & 3, \\
S_{\triangle MC'B'} & = S_{\triangle NCB} = & 1{,}5, \\
S_{\triangle A'LB'} & = S_{\triangle AKB} = & 2, \\
S_{PMLA'} & = S_{RNKA} = & 8. \\
\hline
\end{array}
$$

Je tedy $S_{ABCA'B'C'} = 48 - 2 \cdot (3 + 1{,}5 + 2 + 8) = 19$.
Obsah šestiúhelníku $ABCA'B'C'$ je 19.

4. *Starý podnikatel zemřel a zanechal po sobě dva bankovní účty, jeden dluh a závěť. V závěti je psáno, že peníze z prvního účtu si mají rozdělit první a druhý syn v poměru $1:2$, peníze z druhého účtu první a třetí syn v poměru $1:3$ a dluh mají zaplatit druhý a třetí syn v poměru $2:3$. Zjistěte, kolik korun bylo na prvním, kolik na druhém účtu a jaký dluh museli synové zaplatit, víte-li, že v konečném důsledku každý z nich získal 123 456 korun.*

Řešení. Částky, které si synové rozdělili, označíme takto (počítáme v korunách):

$$\begin{array}{ll} \text{1. syn z 1. účtu} \ldots\ x, & \text{2. syn z 1. účtu} \ldots\ 2x, \\ \text{1. syn z 2. účtu} \ldots\ y, & \text{3. syn z 2. účtu} \ldots\ 3y, \\ \text{2. syn z dluhu} \ \ldots\ 2z, & \text{3. syn z dluhu} \ \ldots\ 3z, \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{první syn dostal:} & x + y = 123\,456, \\ \text{druhý syn dostal:} & 2x - 2z = 123\,456, \\ \text{třetí syn dostal:} & 3y - 3z = 123\,456. \end{array}$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Vyjádříme x z první rovnice a dosadíme do druhé:

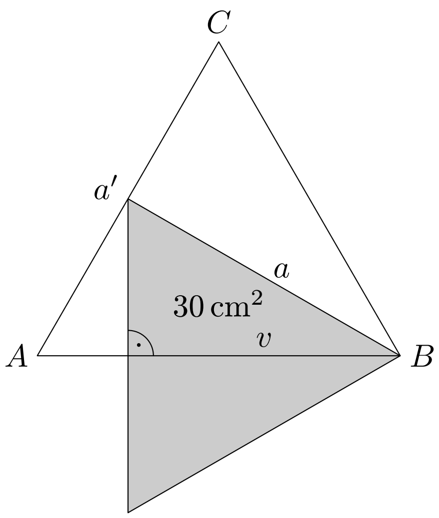
$$2y + 2z = 123\,456,$$
$$3y - 3z = 123\,456.$$

Jejím vyřešením dostáváme: $x = 72\,016$, $y = 51\,440$, $z = 10\,288$. Na prvním účtu bylo 216 048 Kč, na druhém 205 760 Kč a dluh činil 51 440 Kč.

5. *Dva rovnostranné papírové trojúhelníky, z nichž menší má obsah 60 cm², jsme položili přes sebe tak, že jejich průnikem byl pravoúhlý trojúhelník s obsahem 30 cm². Jaký nejmenší obsah mohl mít větší z rovnostranných trojúhelníků?*

Řešení. Polovina malého trojúhelníku leží přes velký trojúhelník.

Pravoúhlý trojúhelník vznikne, když výšku malého trojúhelníku položíme přes stranu velkého trojúhelníku. Větší trojúhelník bude mít nejmenší možný obsah, jestliže jeho strana bude procházet vrcholem menšího trojúhelníku (viz obrázek). Strana malého trojúhelníku je zároveň výškou velkého trojúhelníku. Délku strany velkého trojúhelníku,



malého trojúhelníku a výšku malého trojúhelníku označíme po řadě a', a, v.

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$
$$a' = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Obsah malého trojúhelníku:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2,$$
$$60 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

Obsah velkého trojúhelníku:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a'^2,$$
$$S' = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2\right) \cdot \frac{4}{3},$$
$$S' = 60 \cdot \frac{4}{3},$$
$$S' = 80\,(\mathrm{cm}^2).$$

Větší rovnostranný trojúhelník bude mít obsah minimálně $80\,\mathrm{cm}^2$.

6. *Prověrka obsahovala 26 otázek, jež byly rozděleny podle obtížnosti do tří skupin. V první byla každá správná odpověď hodnocena třemi body, ve druhé pěti body a ve třetí osmi body. Maximální počet bodů byl 111. Kolik otázek mohlo být v jednotlivých skupinách?*

Řešení. Počty otázek v první, druhé a třetí skupině označíme po řadě a, b, c. Ze zadání víme:

$$a + b + c = 26,$$
$$3a + 5b + 8c = 111.$$

Odečteme-li od druhé rovnice trojnásobek první rovnice, získáme rovnici

$$2b + 5c = 33, \tag{1}$$

a tedy

$$b = \frac{33 - 5c}{2}.$$

Aby bylo b přirozené číslo, musí být c liché a navíc $5c \leqq 33$, takže $c \in \{1, 3, 5\}$. Všechna možná řešení jsou uvedena v následující tabulce.

c	b	a
1	14	11
3	9	14
5	4	17

Jiné řešení se dostane k rovnici (1) následující úvahou: 26 otázek po třech bodech by dalo 78 bodů a zbylých 33 bodů musíme rozdělit po dvou na pětibodovou otázku a po pěti na osmibodovou otázku.