MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

56. ROČNÍK, 2006/2007

http://math.muni.cz/mo

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.
Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **3. listopadu 2006** a druhou trojici úloh do **3. ledna 2007**.

Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **8. prosince 2006** a druhou trojici úloh do **2. března 2007**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje.* Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **24. ledna 2007**,
pro kategorii Z6 až Z8 **11. dubna 2007**,
pro kategorii Z5 **24. ledna 2007**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 1 hodiny.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **28. března 2007** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO.* Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2006/2007
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázku uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1) \cdot 40 = -40.$$

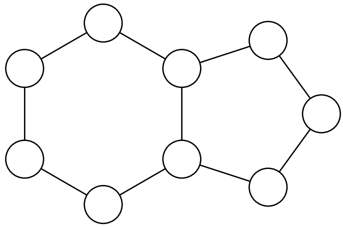
V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Šestiúhelník a pětiúhelník mají společnou stranu se dvěma vrcholy. Doplň do všech vrcholů obou obrazců čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby součet čísel v šestiúhelníku i v pětiúhelníku byl 24. Každé číslo použij právě jednou. Stačí, když najdeš jedno řešení. (*L. Hozová*)



Z5–I–2

Cyklistického závodu Tour de Lhota se zúčastnila šestičlenná družstva. V prvních deseti etapách závod nikdo nevzdal. V jedenácté etapě po hromadném pádu odstoupilo 17 cyklistů a v každé další etapě pak jich odstoupilo vždy o 3 méně než v předešlé etapě. Do cíle závěrečné 15. etapy dojelo 53 cyklistů. Kolik družstev se zúčastnilo závodu? (*Š. Ptáčková*)

Z5–I–3

Cvičená blecha Hopsalka stála na hodinách na čísle 12. Hrála s Vaškem takovou hru: Vašek házel kostkou. Kolik ok mu padlo, o tolik čísel poskočila. Po prvním hodu skočila po směru chodu hodinových ručiček, po druhém hodu proti směru hodinových ručiček a po třetím hodu opět po směru hodinových ručiček. Víme, že Vaškovi padla oka 2, 5 a 6, ale nevíme, v jakém pořadí. Na která čísla mohla Hopsalka doskočit po třetím skoku? (*L. Hozová*)

Z5–I–4

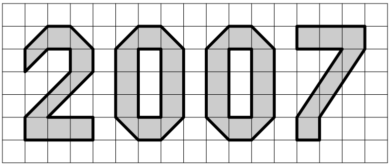
Pomocí číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a pomocí dvou desetinných čárek utvoř dvě desetinná čísla tak, aby jejich součet byl co nejmenší. Najdi všechny možnosti. (Každou číslici použij právě jednou.) (*S. Bednářová*)

Z5–I–5

Sedm trpaslíků sbíralo hříbky. V košíčkách měli 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hříbků. Sněhurka chtěla stejný počet hříbků na polévku jako na smažení i jako na usušení. Jak rozdělili trpaslíci své košíčky do tří skupin tak, aby počet hříbků v každé skupině byl stejný? (Trpaslíci nesměli hříbky z košíčků vytahovat.) (*Š. Ptáčková*)

Z5–I–6

Lucka vystřihovala ze čtverečkovaného papíru číslice 2, 0, 0, 7 tak, jak je naznačeno na obrázku. Urči obsah vystřižených číslic, je-li strana čtverečku sítě dlouhá 4 cm. (*M. Raabová*)



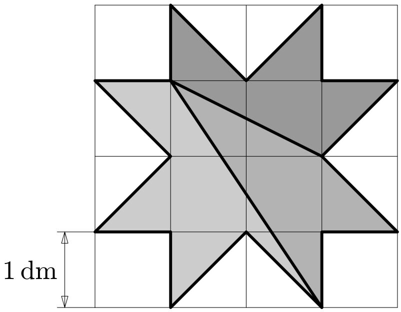
KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Lukáš natíral laťkový plot. Každých 10 minut natřel 8 latěk. Jeho mladší bratr Ondra mu chvilku pomáhal, takže byl Lukáš hotov o čtvrt hodiny dříve, než předpokládal. Jak dlouho mu Ondra pomáhal, když natřel každých 7 minut 4 laťky? (*M. Raabová*)

Z6–I–2

Hvězda na obrázku je rozdělena dvěma úsečkami na tři díly. Zjisti obsah každého z nich. (*L. Šimůnek*)



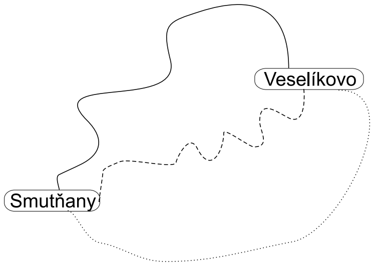
Z6–I–3

Vícemístné číslo se nazývá *optimistické*, jestliže jeho číslice zleva doprava rostou. Jestliže číslice čísla zleva doprava klesají, říkáme, že je to číslo *pesimistické*. Součet sedmimístného pesimistického a sedmimístného optimistického čísla složených z týchž číslic je 11 001 000. Které číslice jsme použili na zápis těchto dvou čísel? (*S. Bednářová*)

Z6–I–4

Ze Smutňan do Veselíkova vedou tři cesty. Ta, která je na mapě vyznačena plnou čarou, měří 40 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 80 km/h a vybírá se na ní mýtné 50 Kč. Čárkovaná cesta je dlouhá 35 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 60 km/h a mýtné je 150 Kč. Na tečkované cestě, která je dlouhá 45 km, se vybírá mýtné 100 Kč a nejvyšší povolená rychlost je 100 km/h. Strýček Uspěchaný a tetička Spořivá se chtějí dostat ze Smutňan do Veselíkova, strýček co nejdříve, tetička co nejlevněji. Oba si zavolali taxi, jehož řidiči si účtují 15 Kč za kilometr cesty a zaplacení mýtného.

1. Kterou cestu má vybrat taxikář strýčka Uspěchaného?
2. Kterou cestu má vybrat taxikář tetičky Spořivé?
3. O kolik minut bude kratší cesta strýčka Uspěchaného v porovnání s cestou tetičky?
4. O kolik korun zaplatí strýček víc než tetička? (*S. Bednářová*)

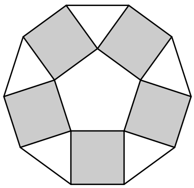


Z6–I–5

Naše třída plánovala turistický výlet. Jednotlivé skupiny myslely, že jeho délka bude 28, 16, 32, 37 a 15 kilometrů. Spletly se ale o 5, 7, 8, 9 a 14 kilometrů. Jak dlouhý byl výlet? (*M. Volfová*)

Z6–I–6

Ze shodných čtverců a rovnoramenných trojúhelníků jsme složili (bez překrývání) útvar znázorněný na obrázku. Zjisti velikosti vnitřních úhlů těchto rovnoramenných trojúhelníků. (*S. Bednářová*)



KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Jana narýsovala šestiúhelník. Délky všech stran vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Potom si uvědomila, že každé dvě jeho sousední strany jsou na sebe kolmé. Narýsuj, jako mohl vypadat Janin šestiúhelník, je-li jeho obvod 16 cm a jeho obsah 12 cm^2. (*M. Dillingerová*)

Z7–I–2

Rozděl obdélník na obrázku na co nejmenší počet tvarově stejných částí tak, aby každá z nich obsahovala jen taková čísla, která dávají po dělení třemi navzájem různé zbytky. Pozor, řezat se smí jen po čárách sítě!

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

(*S. Bednářová*)

Z7–I–3

Urči počet zlomků, jejichž hodnota je celým násobkem tří a čitatel i jmenovatel jsou trojmístná přirozená čísla. (*L. Šimůnek*)

Z7–I–4

Dědeček nesl do mlýna pytel zrní. Najednou mu začala zrníčka z pytle vypadávat a za dědečkem zůstávala cestička značená jednotlivými zrníčky. Tři ptáčci si toho všimli a začali jednotlivá zrníčka zobat. První zobal zrníčka zelený ptáček, a to tak, že sezobal každé čtvrté zrnko ležící na zemi. Potom přiletěl zobat červený ptáček a sezobl každé páté na zemi ležící zrnko. Nakonec slétl na cestičku modrý ptáček a sezobal každé třetí na zemi ležící zrníčko. Kolik zrníček dědeček ztratil, jestliže ptáčci sezobali dohromady 79 zrníček? (*M. Dillingerová*)

Z7–I–5

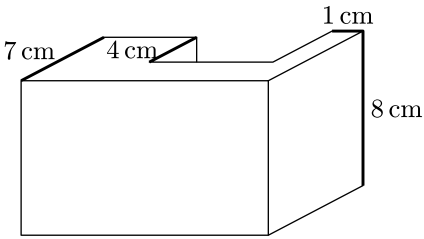
Aspoň trojmístné číslo s navzájem různými ciframi, jehož žádné tři za sebou jdoucí číslice a, b, c nesplňují ani $a < b < c$, ani $a > b > c$, se nazývá *vlnité*. Napiš

a) největší vlnité číslo, které není dělitelné 3,

b) největší vlnité číslo dělitelné 150. (*S. Bednářová*)

Z7–I–6

Osmiboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku vznikl slepením tří kvádrů. Zjisti objem a povrch tohoto hranolu, pokud víš, že mezi osmi jeho bočními stěnami jsou čtyři dvojice shodných stěn, a znáš délky vyznačených hran (obrázek je nepřesný, nevyplatí se měřit). (*S. Bednářová*)



KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Z číslic $1, 2, \ldots, 9$ jsme vytvořili tři smíšená čísla $a\frac{b}{c}$. Potom jsme tato tři čísla správně sečetli. Jaký nejmenší součet jsme mohli dostat? (Každou číslici jsme použili právě jednou.) (*S. Bednářová*)

Z8–I–2

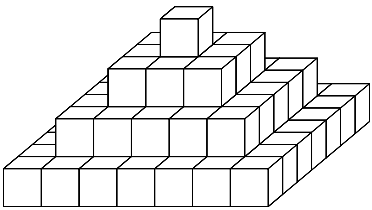
Král si nechal nalít plnou číši vína. Pětinu vína z ní upil. Pak si nechal číši dolít vodou a upil čtvrtinu obsahu. Opět mu číši dolili vodou a král z ní upil třetinu. Páže mu zase číši dolilo vodou. Kolik procent čistého vína zbylo ve sklenici? (*M. Krejčová*)

Z8–I–3

Je dán pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Vypočítejte velikost úhlu, který svírají přímky DG a BE. (*M. Raabová, M. Krejčová*)

Z8–I–4

Žáci postavili z malých kostek pyramidu podobnou té na obrázku, měla však více pater. Pyramida, svého druhu největší na světě, stála od té doby na dvoře školy a pršelo na ni. Po čase se musely všechny kostky, na které pršelo, tedy ty na povrchu, vyměnit. Vyměnilo se celkem 2 025 kostek. Kolik měla pyramida pater? (*L. Šimůnek*)



Z8–I–5

Je dáno čtyřmístné číslo. Přičteme k němu takové čtyřmístné číslo, které je napsáno číslicemi prvního čísla, ale v opačném pořadí. Kterými čísly je vždy dělitelný tento součet? (*L. Hozová*)

Z8–I–6

Výška rovnoramenného trojúhelníku ABC dělí jeho obsah v poměru $1 : 3$. Určete obsah a obvod trojúhelníku ABC, je-li $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}\,\mathrm{cm}$. *(L. Hozová)*

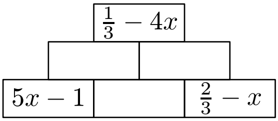
KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin jejich číslic je 750? (*P. Tlustý*)

Z9–I–2

Vyplňte správnými výrazy prázdná pole ve sčítací pyramidě na obrázku. Ve správně vyplněné sčítací pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součet výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním. (*S. Bednářová*)



Z9–I–3

Do kružnice s poloměrem 2 cm je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Přímky FE a CD se protínají v bodě M. Určete délku úsečky AM. (*M. Volfová*)

Z9–I–4

Matematické soutěže se zúčastnilo 142 žáků. Ne každý však odevzdal třetí úlohu. Když nakonec autor soutěže zpracovával statistiku, zapsal si, že odevzdané třetí úlohy ohodnotil průměrně 3,9 bodu (zaokrouhleno na desetiny) a každý soutěžící dostal za třetí úlohu průměrně 2,7 bodu (zaokrouhleno na desetiny). Kolik žáků mohlo odevzdat třetí úlohu? Uděloval se pouze celý počet bodů, za neodevzdanou úlohu bylo 0 bodů. (*L. Šimůnek*)

Z9–I–5

Trojúhelník REZ s obsahem $84\,\mathrm{cm}^2$ ($|RE| = 14\,\mathrm{cm}$, $|ZE| = 15\,\mathrm{cm}$) jsme dvěma přímými řezy rozdělili na tři části a z těch jsme složili (bez překrývání) obdélník. Jaké rozměry mohl obdélník mít? Najděte všechny možnosti. (*S. Bednářová*)

Z9–I–6

Dokažte, že číslo

$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2003 \cdot 2005) + (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2004 \cdot 2006)$$

je dělitelné číslem 2007^4. (*P. Tlustý*)

ÚSTŘEDNÍ KOMISE MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

56. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Leták pro kategorie Z 5 – Z 9
Vydala Jednota českých matematiků a fyziků
pro vnitřní potřebu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR
v 1. vydání
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák