56. ročník Matematické olympiády

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z7

1. *Jana narýsovala šestiúhelník. Délky všech stran vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Potom si uvědomila, že každé dvě jeho sousední strany jsou na sebe kolmé. Narýsuj, jak mohl vypadat Janin šestiúhelník, je-li jeho obvod 16 cm a jeho obsah 12 cm².*

Řešení. Šestiúhelník $ABCEFG$ vznikne složením pravoúhelníků $ABCD$ o obsahu S_1 a $DEFG$ o obsahu S_2 (E je vnitřním bodem strany CD, D vnitřním bodem strany AG).

Označme

$$|AB| = a,\ |BC| = b,\ |CE| = c,\ |EF| = d,\ |FG| = e,\ |GA| = f,$$
$$S_1 = a \cdot b,\ S_2 = e \cdot d,\ S_1 + S_2 = 12,$$
$$a = e + c,\ f = b + d,\ 2a + 2f = 16,\ a + f = 8.$$

Všechny strany proto musí být menší než 8. Lze řešit probráním všech možností pro $S_1 < 12$, pak volit možnosti pro délku strany a (ze vztahu $S_1 = a \cdot b$) a b, dále zjistit f (ze vztahu $a + f = 8$), d ($f = b + d$), S_2 ($S_1 + S_2 = 12$), e ($S_2 = d \cdot e$), c ($a = e + c$).

Úloha má 3 řešení:
$a = 5,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 1,\ e = 2,\ f = 3$;
$a = 4,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 2,\ e = 2,\ f = 4$;
$a = 3,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 3,\ e = 2,\ f = 5$.
Vidíme, že první a třetí šestiúhelník jsou shodné.

2. *Rozděl obdélník na obrázku na co nejmenší počet tvarově stejných částí tak, aby každá z nich obsahovala jen taková čísla, která dávají po dělení třemi navzájem různé zbytky. Pozor, řezat se smí jen po čárách sítě!*

		14	*32*		
43	*102*	*11*			*90*
22	*18*		*301*		*7*
	35		*99*	*29*	
12				*62*	

Řešení. V tabulce je vhodné vyznačit čísla, která dávají po dělení třemi týž zbytek (např. stejnou barvou). Pokud dvě sousední čísla dávají různý zbytek, oddělíme je silnou čarou.

Zbytek 0 mají čísla 102; 18; 90; 99; 12; oddělíme 102 a 18.

Zbytek 1 mají čísla 43; 22; 301; 7; oddělíme 43 a 22.

Zbytek 2 mají čísla 14; 11; 32; 35; 29; 62; oddělíme 14 a 32; 14 a 11; 29 a 62. Pak v levé horní části obdélníka vyjde první oddělená část (skládá se ze dvou prázdných čtverečků a čísel 43; 102; 14). Řešení je na následujícím obrázku:

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

3. *Urči počet zlomků, jejichž hodnota je celým násobkem tří a čitatel i jmenovatel jsou trojmístná přirozená čísla.*

Řešení. Aby hodnota zlomků byla násobkem tří a zároveň i v čitateli byla trojmístná přirozená čísla, mohou být ve jmenovateli pouze

- ▷ čísla 100 až 333 a v čitateli jejich trojnásobek (234 zlomků);
- ▷ čísla 100 až 166 a v čitateli jejich šestinásobek (67 zlomků);
- ▷ čísla 100 až 111 a v čitateli jejich devítinásobek (12 zlomků).

Celkem existuje $234 + 67 + 12 = 313$ takových zlomků.

4. *Dědeček nesl do mlýna pytel zrní. Najednou mu začala zrníčka z pytle vypadávat a za dědečkem zůstávala cestička značená jednotlivými zrníčky. Tři ptáčci si toho všimli a začali jednotlivá zrníčka zobat. První zobal zrníčka zelený ptáček, a to tak, že sezobal každé čtvrté zrnko ležící na zemi. Potom přiletěl zobat červený ptáček a sezobl každé páté na zemi ležící zrnko. Nakonec slétl na cestičku modrý ptáček a sezobal každé třetí na zemi ležící zrníčko. Kolik zrníček dědeček ztratil, jestliže ptáčci sezobali dohromady 79 zrníček?*

Řešení. Je vhodné nakreslit si několik (cca 30) prvních zrnek a povšimnout si, že z každé dvacítky vytroušených zrnek bude vyzobáno 12 zrnek:

zelený ptáček zobe 4., 8., 12., 16., 20. zrnko;

červený ptáček zobe 6., 13., 19. zrnko (původního pořadí);

modrý ptáček zobe 3., 9., 14., 18. zrnko (původního pořadí).

Protože $79 = 6 \cdot 12 + 7 \ldots$, bude vytroušeno 6 dvacítek zrnek a ze sedmé dvacítky ještě několik zrnek, z nichž bude sezobnuto 3., 4., 6., 8., 9., 12., 13. zrnko.

Děda vytrousil 6 dvacítek zrnek a ještě 13 zrnek, tj. $6 \cdot 20 + 13 = 133$ (zrnek).

Poznámka. Nemohl jich vytrousit více, protože následující 134. zrnko není zrovna to, které by zůstalo ležet na zemi, ale to, jež by ptáčci sezobli.

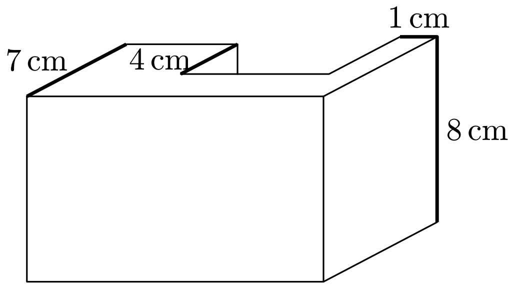
5. *Aspoň trojmístné číslo s navzájem různými ciframi, jehož žádné tři za sebou jdoucí číslice a, b, c nesplňují ani $a < b < c$, ani $a > b > c$, se nazývá* vlnité. *Napiš*

a) největší vlnité číslo, které není dělitelné 3,

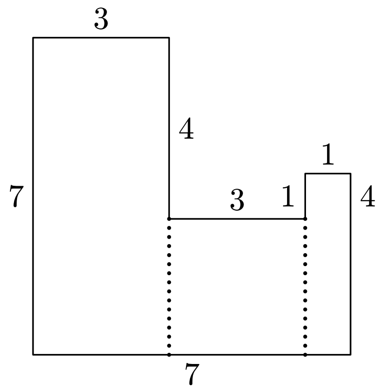
b) největší vlnité číslo dělitelné 150.

Řešení. a) Největší „vlnité“ číslo, které není dělitelné třemi, je 978 563 402.
b) Největší „vlnité“ číslo, které je dělitelné číslem 150, je 9 784 623 150.

6. *Osmiboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku vznikl slepením tří kvádrů. Zjisti objem a povrch tohoto hranolu, pokud víš, že mezi osmi jeho bočními stěnami jsou čtyři dvojice shodných stěn, a znáš délky vyznačených hran (obrázek je nepřesný, nevyplatí se měřit).*



Řešení. Určíme půdorys hranolu (obr.):



Obsah podstavy: $S_p = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 34$ (cm^2).
Objem hranolu: $V = S_p \cdot v = 34 \cdot 8 = 272$ (cm^3).
Povrch hranolu: $S = 2 \cdot (34 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + 1 \cdot 8) = 308$ (cm^2).