56. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

# Komentáře k domácímu kolu kategorie Z8

**1.** *Z číslic* 1,2,...,9 *jsme vytvořili tři smíšená čísla* $a\frac{b}{c}$*. Potom jsme tato tři čísla správně sečetli. Jaký nejmenší součet jsme mohli dostat? (Každou číslici jsme použili právě jednou.)*

Řešení. Další dvě smíšená čísla si označíme $d\frac{e}{f}$ a $g\frac{h}{i}$. Má-li být součet těchto tří čísel nejmenší možný, musí být především nejmenší možný součet $a + d + g$. Použijeme tedy číslice 1, 2, a 3. Dále nám zbývají zlomky. Má-li být jejich součet co nejmenší, musí být v jejich jmenovatelích co největší čísla, tedy 7, 8, a 9. Dále vyzkoušíme všechny možnosti, jak doplnit čísla do čitatelů (protože budeme tyto zlomky porovnávat, je výhodnější je nekrátit):

$$\frac{4}{7}+\frac{5}{8}+\frac{6}{9}=\frac{939}{504}, \tag{a}$$
$$\frac{4}{7}+\frac{6}{8}+\frac{5}{9}=\frac{946}{504}, \tag{b}$$
$$\frac{5}{7}+\frac{4}{8}+\frac{6}{9}=\frac{948}{504}, \tag{c}$$
$$\frac{5}{7}+\frac{6}{8}+\frac{4}{9}=\frac{962}{504}, \tag{d}$$
$$\frac{6}{7}+\frac{4}{8}+\frac{5}{9}=\frac{964}{504}, \tag{e}$$
$$\frac{6}{7}+\frac{5}{8}+\frac{4}{9}=\frac{971}{504}. \tag{f}$$

Je zřejmé, že nejmenší možný součet dostaneme v prvním případě, a to:

$$1+\frac{4}{7}+2+\frac{5}{8}+3+\frac{6}{9}=6+\frac{939}{504}=7\,\frac{145}{168}.$$

**2.** *Král si nechal nalít plnou číši vína. Pětinu vína z ní upil. Pak si nechal číši dolít vodou a upil čtvrtinu obsahu. Opět mu číši dolili vodou a král z ní upil třetinu. Páže mu zase číši dolilo vodou. Kolik procent čistého vína zbylo ve sklenici?*

Řešení. Je důležité si uvědomit, že doléváním vody se množství čistého vína v číši nemění. A když král upil z číše ředěného vína např. třetinu, znamená to, že upil třetinu čistého vína v číši a třetinu vody v číši. Takže stačí pouze sledovat množství čistého vína ve sklenici.

Poprvé: vypil $\frac{1}{5}$ vína, zbyly $\frac{4}{5}$ vína.

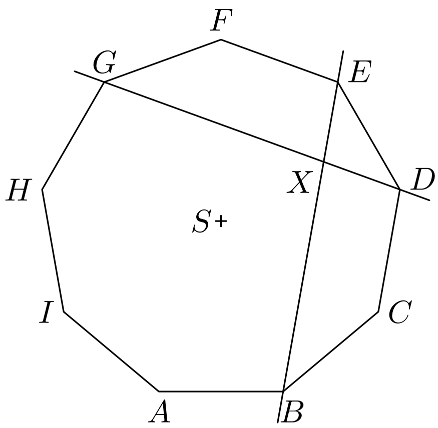
Podruhé: vypil $\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ vína, zbyly $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$ vína.

Potřetí: vypil $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$ vína, zbyly $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ vína.

Ve sklenici nakonec zbyly $\frac{2}{5}$ čistého vína, což je 40 % (zbytek byla voda).

**3.** *Je dán pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Vypočítejte velikost úhlu, který svírají přímky $DG$ a $BE$.*

ŘEŠENÍ. Označme $S$ střed pravidelného devítiúhelníku a $X$ průsečík přímek $DG$ a $BE$ (obr.). Všimneme si trojúhelníku $BGX$, ve kterém máme určit velikost úhlu $GXB$ (resp. $GXE$; zajímá nás ten, který je menší). K tomu potřebujeme znát velikosti ostatních vnitřních úhlů.




Pravidelný devítiúhelník je možno rozdělit na devět shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem $S$. Vnitřní úhel při vrcholu $S$ u každého z těchto trojúhelníků má velikost $360° : 9 = 40°$.

Nyní určíme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku $SBG$ (je rovněž rovnoramenný, se základnou $BG$):

$$|\sphericalangle BSG| = 4 \cdot 40° = 160°,$$
$$|\sphericalangle SBG| = |\sphericalangle SGB| = (180° - 160°) : 2 = 10°.$$

Dále zjistíme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku $SDG$ (rovnoramenný se základnou $DG$):

$$|\sphericalangle DSG| = 3 \cdot 40° = 120°,$$
$$|\sphericalangle SGD| = |\sphericalangle SDG| = (180° - 120°) : 2 = 30°.$$

Analogicky vypočteme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku $SBE$ (rovnoramenný se základnou $BE$):

$$|\sphericalangle BSE| = 3 \cdot 40° = 120°,$$
$$|\sphericalangle SBE| = |\sphericalangle SEB| = (180° - 120°) : 2 = 30°.$$

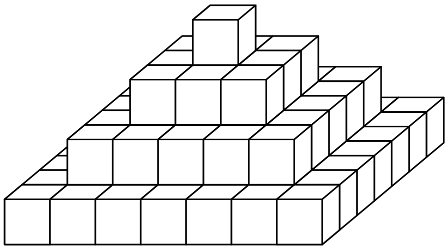
Nyní zpátky k trojúhelníku $BGX$:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BXG| &= 180° - |\sphericalangle GBX| - |\sphericalangle BGX| = \\ &= 180° - (|\sphericalangle GBS| + |\sphericalangle SBE|) - (|\sphericalangle BGS| + |\sphericalangle SGD|) = \\ &= 180° - (10° + 30°) - (10° + 30°) = 100°.\end{aligned}$$

Odtud $|\sphericalangle GXE| = 180° - 100° = 80°$.

Přímky $BE$ a $DG$ svírají úhel $80°$.

**4.** *Žáci postavili z malých kostek pyramidu podobnou té na obrázku, měla však více pater. Pyramida, svého druhu největší na světě, stála od té doby na dvoře školy a pršelo na ni. Po čase se musely všechny kostky, na které pršelo, tedy ty na povrchu, vyměnit. Vyměnilo se celkem 2 025 kostek. Kolik měla pyramida pater?*



Řešení. Každé patro pyramidy je tvořeno jednou vrstvou kostek, které jsou uspořádané do čtverce (tj. na každé straně tohoto patra je stejný počet kostek). Po odebrání všech kostek na povrchu dostaneme tentýž typ pyramidy, jen o jedno patro nižší. To znamená, že odebrané kostky lze uspořádat do čtverce, který odpovídá nejnižšímu patru původní pyramidy. Nejprve zjistíme, kolik kostek je na straně tohoto patra:

$$x^2 = 2\,025,$$
$$x = 45 \text{ kostek.}$$

Zbývá ještě určit, jakému počtu pater tento počet kostek odpovídá:

| | |
|---|---|
| 1. patro ... | 1 kostka |
| 2. patro ... | 3 kostky |
| 3. patro ... | 5 kostek |
| ⋮ | |
| $n$. patro ... | $(2n-1)$ kostek |

Odtud

$$2n - 1 = 45,$$
$$n = 23 \text{ pater.}$$

Pyramida měla 23 pater.

**5.** *Je dáno čtyřmístné číslo. Přičteme k němu takové čtyřmístné číslo, které je napsáno číslicemi prvního čísla, ale v opačném pořadí. Kterými čísly je vždy dělitelný tento součet?*

Řešení. Libovolné čtyřmístné číslo lze zapsat jako $1\,000a + 100b + 10c + d$, nově vytvořené číslo (ze zadání úlohy) má potom tvar $1\,000d + 100c + 10b + a$. Sečteme-li tato dvě čísla, dostáváme po úpravě $1\,001(a + d) + 110(b + c)$. Hledáme-li číslo, kterým je tento součet vždy dělitelný, nesmí být závislé na hodnotě číslic. Potřebujeme vlastně zjistit společné dělitele obou členů:

1. člen $1\,001(a + d) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (a + d)$ je vždy dělitelný čísly: $\underline{1}$, 7, $\underline{11}$, 13, 77, 91, 143, 1 001.

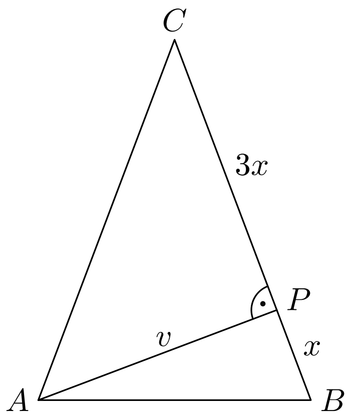
2. člen $110(b+c) = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot (b+c)$ je vždy dělitelný čísly: $\underline{1}$, 2, 5, 10, $\underline{11}$, 22, 55, 110.

Tento součet bude vždy dělitelný čísly 1 a 11.

**6.** *Výška rovnoramenného trojúhelníku $ABC$ dělí jeho obsah v poměru $1:3$. Určete obsah a obvod trojúhelníku $ABC$, je-li $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm.*

Řešení. Je důležité si uvědomit, o kterou výšku se jedná: výška na základnu je zároveň těžnicí, takže dělí obsah trojúhelníku v poměru $1:1$. Výška v zadání úlohy je tedy výškou na rameno. Tato výška $v$ rozdělí trojúhelník $ABC$ na dva pravoúhlé trojúhelníky. Protože mají jednu odvěsnu společnou a obsahy v poměru $1:3$, musí být zbývající odvěsny v poměru $1:3$. Označme délku ramen $4x$ a patu výšky $v$ jako $P$. Nyní mohou nastat dvě situace:

(a) Kratší úsek ramena leží u základny $AB$.




Sestavíme dvě rovnice z Pythagorovy věty (pro trojúhelník $APC$ a trojúhelník $ABP$):

$$(3x)^2 + v^2 = (4x)^2,$$
$$x^2 + v^2 = \left(\sqrt{32}\right)^2.$$

Z obou vyjádříme druhou mocninu výšky $v$:

$$v^2 = 7x^2,$$
$$v^2 = 32 - x^2.$$

Odtud:

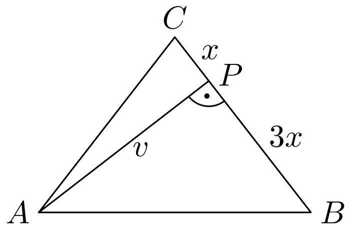
$$7x^2 = 32 - x^2,$$
$$x = 2 \text{ (cm)}.$$

Dále je

$$|AC| = |BC| = 4x = 8 \text{ (cm)},$$
$$|AP| = v = \sqrt{7x^2} = 2\sqrt{7} \text{ (cm)}.$$

Obsah trojúhelníku $ABC$ je $S = \frac{1}{2}|BC| \cdot v = 8\sqrt{7}\,\text{cm}^2$.

Obvod trojúhelníku $ABC$ je $o = 2|BC| + |AB| = 16 + \sqrt{32} = 4\big(4 + \sqrt{2}\big)$ (cm).
(b) Delší úsek ramena leží u základny $AB$.




Postupujeme analogicky. Sestavíme dvě rovnice z Pythagorovy věty:

$$x^2 + v^2 = (4x)^2,$$
$$(3x)^2 + v^2 = \big(\sqrt{32}\big)^2.$$

Z obou vyjádříme druhou mocninu výšky $v$:

$$v^2 = 15x^2,$$
$$v^2 = 32 - 9x^2.$$

Odtud:

$$15x^2 = 32 - 9x^2,$$
$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}.$$

Dále je

$$|AC| = |BC| = 4x = \frac{8}{3}\sqrt{3}\,\text{cm},$$
$$|AP| = v = \sqrt{15x^2} = 2\sqrt{5}\,\text{cm}.$$

Obsah trojúhelníku $ABC$ je $S = \frac{1}{2}|BC| \cdot v = \frac{8}{3}\sqrt{15}\,\text{cm}^2$.
Obvod trojúhelníku $ABC$ je $o = 2|BC| + |AB| = \frac{16}{3}\sqrt{3} + \sqrt{32} = 4\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$ (cm).