MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

57. ROČNÍK, 2007/2008

`http://math.muni.cz/mo`

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.
Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **5. listopadu 2007** a druhou trojici úloh do **7. ledna 2008**.
Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **10. prosince 2007** a druhou trojici úloh do **3. března 2008**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje.* Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **23. ledna 2008**,
pro kategorii Z6 až Z8 **9. dubna 2008**,
pro kategorii Z5 **23. ledna 2008**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 1 hodiny.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **26. března 2008** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky.* Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO.* Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2007/2008
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázku uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1) \cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Kuchyňský stůl má tvar obdélníku o rozměrech 90 cm×140 cm. Chceme na něj ušít ubrus tak, aby na všech okrajích stolu přesahoval stejně.

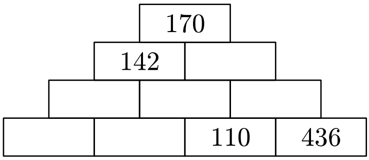
a) Kolik látky šířky 140 cm je třeba koupit, abychom již nemuseli látku stříhat?

b) Kolik centimetrů bude tento ubrus na každé straně přesahovat?

((*Světlana Bednářová*)

Z5–I–2

Doplň na prázdné cihličky pyramidy z obrázku chybějící čísla tak, aby platilo: na každé cihličce (kromě spodní řady) je napsané číslo, které se rovná polovině součtu čísel napsaných na dvou sousedních cihličkách z nižšího řádku.



(*Světlana Bednářová*)

Z5–I–3

Ve školce mají stavebnici ze stejně velkých molitanových kvádrů. Délky jejich hran v centimetrech jsou celá čísla. Když děti chtějí postavit věž, položí všechny kvádry na sebe tak, aby na sobě ležely stejnými stěnami a aby v žádném patře nebyly dva kvádry vedle sebe. Takto se jim postupně podařilo postavit tři různě vysoké věže. První měla výšku 120 cm, druhá 130 cm a třetí 150 cm. Kolik kvádrů mohly děti ve školce mít?

(*Světlana Bednářová*)

Z5–I–4

Trojčata právě oslavila své třetí narozeniny. Za pět let bude součet jejich věků roven dnešnímu stáří jejich matky. Kolik let bude jejich matce za pět let? (*Marie Krejčová*)

Z5–I–5

Číslo se nazývá *mazané*, jestliže počínaje od jeho třetí číslice zleva platí: Každá jeho číslice je součtem všech číslic ležící nalevo od něj.

a) Uveď dvě největší mazaná čísla.

b) Kolik je všech čtyřmístných mazaných čísel? (*Světlana Bednářová*)

Z5–I–6

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 16 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:

$$\square \xrightarrow{+\,8} \square \xrightarrow{:\,5} \square \xrightarrow{+\,10} \square$$

$$\square \xrightarrow{:\,4} \square \xrightarrow{+\,6} \square \xrightarrow{+\,1} \square$$

$$\square \xrightarrow{:\,7} \square \xrightarrow{:\,2} \square \xrightarrow{+\,4} \square$$

$$\square \xrightarrow{+\,4} \square \xrightarrow{:\,2} \square \xrightarrow{+\,3} \square$$

(*Miroslava Smitková*)

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Potom zjistili, že průměrně je vyšla jedna čokoláda na 19,70 Kč. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a o 6,50 Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Za kolik korun prodávají čokoládu v jednotlivých obchodech?

(*Monika Dillingerová*)

Z6–I–2

Michal měl barevné nálepky dvou druhů ve tvaru pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. První nálepka měla ramena délky 5 cm, těch bylo 9. Druhá měla nejdelší stranu dlouhou 10 cm a těchto nálepek bylo 17. Kolik nálepek prvního druhu si má Michal ještě dokoupit, aby všemi svými nálepkami mohl oblepit (pokrýt) stěny krychle s hranou délky 10 cm?

(*Monika Dillingerová*)

Z6–I–3

V rovině mají ležet body A, B, C, D tak, aby platilo: $|AB| = 7\,\text{cm}$, $|BC| = 8\,\text{cm}$, $|CD| = 5\,\text{cm}$ a $|DA| = 9\,\text{cm}$.

a) Urči největší možnou vzdálenost bodů A a C.

b) Urči nejmenší možnou vzdálenost bodů A a C. (*Libor Šimůnek*)

Z6–I–4

Při chudokrevnosti se doporučuje pít směs šťávy z mrkve a červené řepy. Červená řepa však má tvořit pouze 1/5 z objemu nápoje. Ze dvou kilogramů mrkve získáme v odšťavňovači 7,5 dl šťávy. Z jednoho kilogramu červené řepy získáme 6 dl šťávy.

a) Jaké množství mrkve potřebujeme na 250 gramů červené řepy, abychom získali správně namíchanou směs šťávy?

b) Jaké množství šťávy takto získáme? (*Světlana Bednářová*)

Z6–I–5

Řekne-li mimozemšťan v rozhovoru o Vánocích „haf quin lina", znamená to „velké zlaté hvězdy"; když „kari lina mejk", znamená to „blikavá zlatá kolečka"; když „esca haf kari", znamená to „červená velká kolečka". Jak se řekne „blikavé hvězdy"? (Zapiš svou úvahu.) (*Marta Volfová*)

Z6–I–6

Z čísel 532 a 179 vyškrtni dohromady dvě číslice, aby součin takto vzniklých čísel byl co možná největší. (*Monika Dillingerová*)

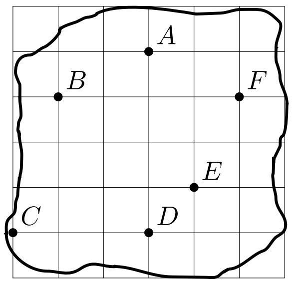
KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Číslo je *trochu nešťastné*, je-li násobkem čísla 13. Číslo, které je násobkem čísla 17, se nazývá *trochu usměvavé.* Kolik existuje čísel mezi přirozenými čísly od 1 do 1 000 000, která nekončí nulou ani pětkou a jsou přitom zároveň trochu nešťastná a trochu usměvavá? (*Marta Volfová*)

Z7–I–2

Vláda země Tramtárie se rozhodla, že své území rozdělí do šesti okresů. Vybrala proto šest nejvýznamnějších měst a každému chce přiřadit okres podle následujícího klíče: každé místo v zemi patří do okresu toho města, které je danému místu nejblíže. Překreslete si ve vhodném měřítku mapu Tramtárie a narýsujte do ní hranice okresů. (Okresní města jsou označena písmeny A–F, silná čára značí hranice Tramtárie. Pomyslná čtvercová síť má pouze usnadňovat orientaci v mapě a nijak neovlivňuje hranice okresů!)



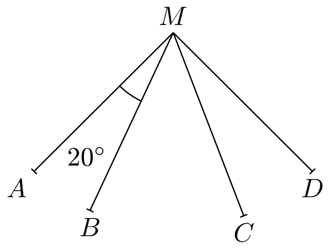
(*Libor Šimůnek*)

Z7–I–3

Ve 12 hodin stála na parkovišti česká, německá a francouzská auta, a to v poměru 9 : 4 (česká ku německým) a 2 : 3 (německá ku francouzským). Během hodiny odjelo jedenáct a přijelo pět českých aut, odjelo jedno a přijelo jedenáct německých aut a odjela tři a přijelo šest francouzských aut. Jaký je poměr českých, německých a francouzských aut ve 13.00 na parkovišti, když ve 12.00 tam bylo dvanáct francouzských aut? (*Šárka Ptáčková*)

Z7–I–4

Úsečky AM, BM, CM a DM uspořádané jako na obrázku mají stejnou délku. Úhly, které svírají, mají velikosti $20°$, $20°$, $50°$, $50°$, $70°$ a α. Jaká je velikost úhlu, který svírají přímky AB a CD? (Obrázek je nepřesný, nevyplatí se měřit.) (*Michaela Raabová*)



Z7–I–5

Políčka na šachovnici 4×4 vybarvi 4 barvami a vepiš do nich 4 písmena J, A, R, O tak, aby v každém řádku i každém sloupci byly zastoupeny všechny barvy i všechna písmena. (Každé políčko bude obsahovat právě jedno písmeno a bude vybarveno jednou barvou. Každé písmeno musí být vybarveno postupně všemi barvami a také každá barva musí vystřídat všechna písmena.) Najdi aspoň jedno řešení. (*Marta Volfová*)

Z7–I–6

Na papíře je napsáno několik bezprostředně po sobě jdoucích přirozených čísel. Je mezi nimi 12 násobků čísla 5 a 10 násobků čísla 7.

a) Kolik přirozených čísel je na papíře napsáno?

b) Najdi jednu řadu čísel, která odpovídá těmto podmínkám.

(*Libor Šimůnek*)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Najděte všechna čtyřmístná čísla dělitelná třemi, která po vynásobení číslem 17 dávají součin končící trojčíslím 519. (*Libuše Hozová*)

Z8–I–2

Najděte všechny trojice přirozených čísel menších než 10, jejichž součin je sedminásobkem jejich součtu. (*Libuše Hozová*)

Z8–I–3

Jano si koupil sedmimílové boty. Jeho kamarád Honza z Čech si koupil létající koberec. Potom se oba dva zúčastnili pohádkového dvanáctihodinového závodu. Během závodu měli hlad, a tak se oba dva zastavili na jídlo. Oběma zabrala přestávka na jídlo jednu hodinu. Kdyby se Honza nezastavil po cestě na vepřo-knedlo-zelo, předběhl by Jana o 51 kilometrů. Kdyby se Jano nestavil na bryndzové halušky, předběhl by Honzu o 28 kilometrů. Jak daleko od sebe by skončili, kdyby nejedl ani jeden z nich? Kdo z nich by byl první? (*Monika Dillingerová*)

Z8–I–4

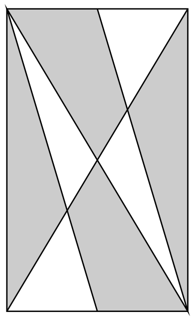
V Tramtárii mají pět lékařských fakult, z nichž každá může přijmout do prvního ročníku 200 studentů. Přijímací zkoušky na jednotlivé fakulty se konají v různé dny, proto si studenti mohou podat přihlášku na více škol. Ptali jsme se na jednotlivých fakultách, kolik dostali přihlášek pro rok 2007/08. Získali jsme tyto odpovědi:

1. fakulta: „Dostali jsme pětkrát více přihlášek, než kolik jsme měli volných míst.“
2. fakulta: „U nás počet uchazečů převyšoval kapacitu o 320 %.“
3. fakulta: „Na naši fakultu se hlásilo o 510 uchazečů více, než kolik jsme mohli přijmout.“
4. fakulta: „U nás na každé volné místo připadly v průměru 3 přihlášky.“
5. fakulta: „K nám se hlásilo o tři čtvrtiny zájemců více, než kolik jsme měli míst.“

V akademickém roce 2007/08 nakonec na lékařské fakulty nastoupilo do 1. ročníku 1 000 studentů. Ze statistik vyplývá, že zájemce o studium medicíny podal na lékařské fakulty průměrně 2,5 přihlášky. Kolik zájemců se nedostalo na žádnou z fakult? (*Libor Šimůnek*)

Z8–I–5

Pan Poleno s panem Střepinou vyráběli nové domovní dveře o velikosti $3\,\mathrm{m}^2$. Rám dveří tvaru obdélníku, jeho úhlopříčky a dvě další příčky, které spojovaly dva vrcholy obdélníku se středy protilehlých stran, byly z kovových tyčí. Pan Poleno vyplnil dřevem čtyři tmavé části dveří a pan Střepina zbývající části dveří zasklil. Kolik metrů čtverečních dřeva potřeboval pan Poleno na výplň dveří? (*Libuše Hozová*)



Z8–I–6

Uprostřed náměstí v Kocourkově je čtvercový travnatý záhon. Kocourkovští zjistili, že zapomněli udělat chodník. Proto na něj z každého okraje záhonu ubrali 2 metry. Před položením zámkové dlažby a písku pod ní bylo třeba pod celou plochu chodníku vykopat půl metru hluboký výkop. Odkopáním trávy a hlíny se záhon zmenšil o $1\,200\,\mathrm{m}^2$.

a) Vypočtěte obsah zbylého travnatého záhonu.
b) Kolik m^3 písku je pod dlažbou, jestliže povrch dlažby je v rovině s travnatým záhonem a výška dlaždice je 8 cm. (*Miroslava Smitková*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

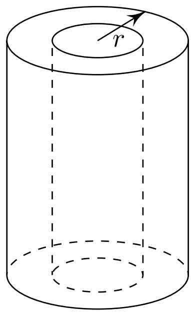
Najděte všechna čtyřmístná čísla končící číslicí 9, která jsou dělitelná každou svou číslicí. (*Pavel Tlustý*)

Z9–I–2

Petr se ptal babičky, kolik je dědečkovi let. Babička mu odpověděla takto: „To víš, už dávno nám není padesát, ale zase nám ještě není osmdesát let. Když vynásobíš součet mého a dědečkova věku jejich rozdílem a k výsledku přičteš oba naše věky, dostaneš 492." „Aha," řekl po chvíli Petr, „tak to je dědečkovi…" Kolik let je Petrovu dědečkovi, víte-li, že je starší než Petrova babička? (*Michaela Raabová*)

Z9–I–3

Středem rotačního válce s podstavou o poloměru r a výškou v byl vyvrtán válcový otvor. Objem takto vzniklého „dutého válce" je poloviční než objem válce původního. Vyjádřete tloušťku stěny dutého válce pomocí r.



(*Marie Krejčová*)

Z9–I–4

Minulou divadelní sezónu se prodávaly vstupenky za jednotnou cenu 160 Kč. Pro letošní sezónu se sedadla rozdělila do dvou kategorií. Místa I. kategorie stojí 180 Kč, místa II. kategorie 155 Kč. Pokud jsou všechna sedadla v sále rozprodána, je celková tržba stejná jako při vyprodaném představení loni. Ředitel divadla však není s tímto rozdělením spokojen, a pro příští sezónu plánuje změnu: z nejméně atraktivních míst současné II. kategorie vytvoří novou III. kategorii. Aby se tržba za vyprodaný sál nezměnila, rozhodl, že vstupenky budou stát 180 Kč (I. kategorie), 160 Kč (II. kategorie) a 130 Kč (III. kategorie). V jakém poměru budou příští sezónu počty sedadel jednotlivých kategorií? (*Libor Šimůnek*)

Z9–I–5

Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a je o 6,50 Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Ve školním bufetu prodávají čokoládu za 19,50 Kč. Kolik zaplatili kluci za všech pět čokolád dohromady? Kolik stojí jedna čokoláda v obchodě za školou?

(*Monika Dillingerová*)

Z9–I–6

V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte bod K, který je vrcholem rovnoběžníku $BCDK$, a bod L, který je vrcholem rovnoběžníku $CDAL$. Ukažte, že přímka KL prochází středem strany AB daného čtyřúhelníku $ABCD$. (*Jaroslav Švrček*)

ÚSTŘEDNÍ KOMISE MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

57. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Leták pro kategorie Z 5 – Z 9
Vydala Jednota českých matematiků a fyziků
pro vnitřní potřebu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR
v 1. vydání
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák