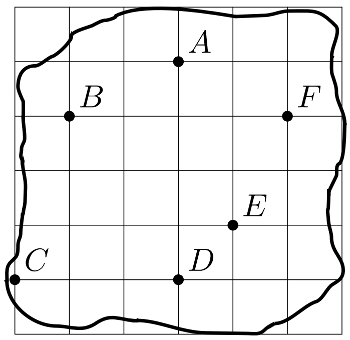
57. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z7

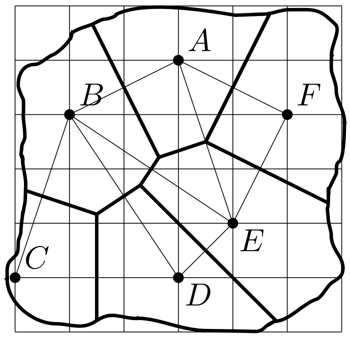
1. *Číslo je* trochu nešťastné, *je-li násobkem čísla 13. Číslo, které je násobkem čísla 17, se nazývá* trochu usměvavé. *Kolik existuje čísel mezi přirozenými čísly od 1 do 1 000 000, která nekončí nulou ani pětkou a jsou přitom zároveň trochu nešťastná a trochu usměvavá?*

ŘEŠENÍ. Čísla zároveň „trochu nešťastná“ a „trochu usměvavá“ jsou čísla, která jsou zároveň násobky čísel 13 a 17. Nejmenší z nich je $13 \cdot 17 = 221$. V milionu je takových čísel $1\,000\,000 : 221 = 4\,524$ (zb. 196), jsou to čísla $1 \cdot 221$, $2 \cdot 221$,$3 \cdot 221$, $4 \cdot 221$, $5 \cdot 221, \ldots, 4\,524 \cdot 221$. Hledaná čísla nesmí být zároveň násobky pěti (to by měla na místě jednotek 0 nebo 5). Ve výše uvedené řadě 4 524 čísel je násobků čísla pět $4\,524 : 5 = 904$ (zb. 4). Hledaných čísel je tedy $4\,524 - 904 = 3\,620$.

2. *Vláda země Tramtárie se rozhodla, že své území rozdělí do šesti okresů. Vybrala proto šest nejvýznamnějších měst a každému chce přiřadit okres podle následujícího klíče: každé místo v zemi patří do okresu toho města, které je danému místu nejblíže. Překreslete si ve vhodném měřítku mapu Tramtárie a narýsujte do ní hranice okresů. (Okresní města jsou označena písmeny A–F, silná čára značí hranice Tramtárie. Pomyslná čtvercová síť má pouze usnadňovat orientaci v mapě a nijak neovlivňuje hranice okresů!)*



ŘEŠENÍ. Množině bodů, které mají od bodů X a Y stejnou vzdálenost, odpovídá osa úsečky XY. Všechny hranice mezi okresy jsou tedy osami spojnic dvou měst. Při



rýsování obrázku je výhodné začít těmi „hraničními“ úsečkami, které protínají státní hranici.

3. *Ve 12 hodin stála na parkovišti česká, německá a francouzská auta, a to v poměru 9 : 4 (česká ku německým) a 2 : 3 (německá ku francouzským). Během hodiny odjelo jedenáct a přijelo pět českých aut, odjelo jedno a přijelo jedenáct německých aut a odjela tři a přijelo šest francouzských aut. Jaký je poměr českých, německých a francouzských aut ve 13.00 na parkovišti, když ve 12.00 tam bylo dvanáct francouzských aut?*

Řešení. Ve 12 hodin:
česká : německým … 9 : 4,
německá : francouzským … 2 : 3;
francouzských bylo 12, tedy německých 8.

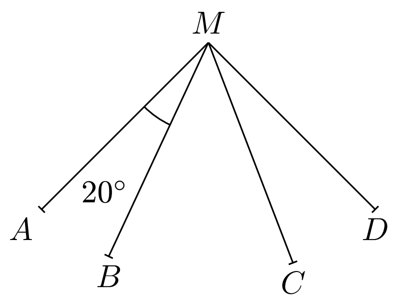
(12 francouzských tvoří 3 díly, tj. 1 díl je 4; německých jsou 2 díly, tj. 8.) Když německých 8, tedy českých 18.

(8 tvoří nyní 4 díly, 1 díl jsou 2; českých je 9 dílů, tj. 18.)

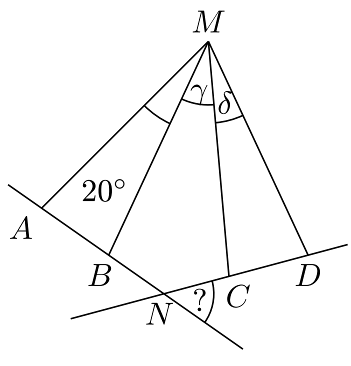
Ve 13 hodin:
českých: $18 - 11 + 5 = 12$,
německých: $8 - 1 + 11 = 18$,
francouzských: $12 - 3 + 6 = 15$.

Poměr českých, německých a francouzských aut na parkovišti ve 13.00 je 12 : 18 : 15, tj. po zkrácení 4 : 6 : 5.

4. *Úsečky AM,BM,CM a DM uspořádané jako na obrázku mají stejnou délku. Úhly, které svírají, mají velikosti 20°, 20°, 50°, 50°, 70° a α. Jaká je velikost úhlu, který svírají přímky AB a CD? (Obrázek je nepřesný, nevyplatí se měřit.)*



Řešení. Používáme-li značení dle obrázku, mají úhly zmiňované v zadání tyto velikosti: $20°$, γ, δ, $20° + \gamma$, $\gamma + \delta$, $20° + \gamma + \delta$.



Prověříme všechny možné velikosti $20° + \gamma$.

1) Předpokládejme, že $20° + \gamma = 50°$. Pak $\gamma = 30°$. Některá z neznámých velikostí úhlů musí být dle zadání $20°$, připadá v úvahu pouze $\delta = 20°$. Spočítáme velikosti všech zmiňovaných úhlů, a dozvíme se, že odpovídají zadání.

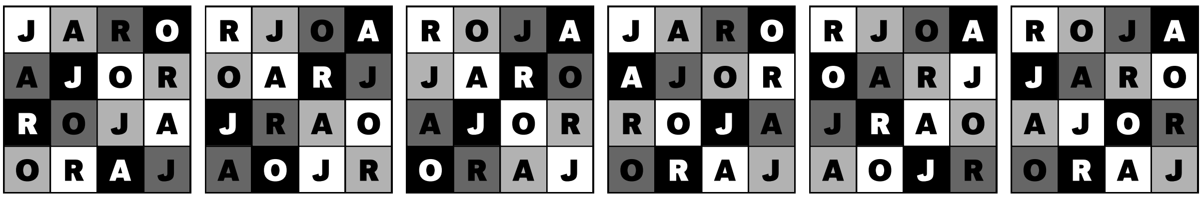
2) Předpokládejme, že $20° + \gamma = 70°$. Pak $\gamma = 50°$. Některá z neznámých velikostí úhlů musí být dle zadání $20°$, připadá v úvahu pouze $\delta = 20°$. Zmiňovaná šestice úhlů má tak tyto velikosti: $20°$, $50°$, $20°$, $70°$, $70°$, $90°$, což je v rozporu se zadáním.

3) Předpokládejme, že $20°+\gamma = \alpha$. Ze zmiňovaných úhlů je největší úhel $20°+\gamma+\delta$, proto musí být roven $70°$. Pak $\gamma+\delta = 50°$. Pro úhly γ, δ však v zadání nelze najít takové velikosti, aby byla předchozí rovnost splněna. Docházíme k jedinému řešení: $\gamma = 30°$, $\delta = 20°$.

Trojúhelník MAB je rovnoramenný, proto $|\sphericalangle ABM| = (180° - 20°) : 2 = 80°$. Vedlejší úhel MBN má velikost $|\sphericalangle MBN| = 180° - 80° = 100°$. Obdobně — přes výpočet úhlů v trojúhelníku MDC — dojdeme k velikosti úhlu $|\sphericalangle MCN| = 100°$. Velikost vnitřních úhlů čtyřúhelníku $MBNC$ je $360°$, proto $|\sphericalangle BNC| = 360° - 30° - 100° - 100° = 130°$. Vedlejší úhel k tomuto úhlu má velikost $50°$, přímky AB a CD tedy svírají úhel $50°$.

5. *Políčka na šachovnici 4 × 4 vybarvi 4 barvami a vepiš do nich 4 písmena J, A, R, O tak, aby v každém řádku i každém sloupci byly zastoupeny všechny barvy i všechna písmena. (Každé políčko bude obsahovat právě jedno písmeno a bude vybarveno jednou barvou. Každé písmeno musí být vybarveno postupně všemi barvami a také každá barva musí vystřídat všechna písmena.) Najdi aspoň jedno řešení.*

Řešení. Tabulku lze vyplnit písmeny a vybarvit např. takto:



Poznámka. Síť lze vyplnit písmeny v zásadě pouze čtyřmi způsoby:

J	A	R	O
A	J	O	R
R	O	J	A
O	R	A	J

Typ I

J	A	R	O
A	J	O	R
R	O	A	J
O	R	J	A

Typ II

J	A	R	O
A	R	O	J
R	O	J	A
O	J	A	R

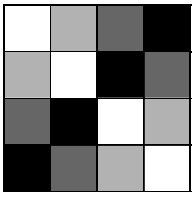
Typ III

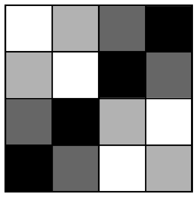
J	A	R	O
A	O	J	R
R	J	O	A
O	R	A	J

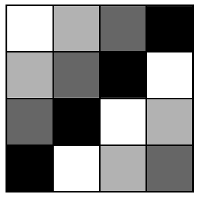
Typ IV

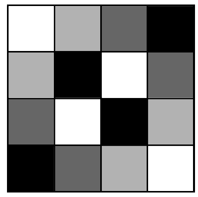
Každý tento typ zahrnuje mnoho podob, které získáme vzájemnou výměnou sloupců a vzájemnou výměnou řádků. Pro přehlednost jsme uvedli právě takové uspořádání řádků a sloupců, aby v prvním řádku a prvním sloupci bylo čitelné slovo JARO.

Obdobně existují čtyři typy vybarvení sítě:


Typ I


Typ II


Typ III


Typ IV

Zajímavé a důležité je, že vybarvit popsaná políčka podle zadaných podmínek lze pouze tehdy, pokud uspořádání písmen je typu I, a to vždy právě dvěma způsoby (oba způsoby obarvení jsou rovněž typu I).

6. *Na papíře je napsáno několik bezprostředně po sobě jdoucích přirozených čísel. Je mezi nimi 12 násobků čísla 5 a 10 násobků čísla 7.*

a) Kolik přirozených čísel je na papíře napsáno?

b) Najdi jednu řadu čísel, která odpovídá těmto podmínkám.

Řešení. a) Aby byla splněna podmínka, že v řadě po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel je 12 násobků pěti, musí být v řadě

▷ minimálně $12 \cdot 5 - 4 = 56$ čísel (řada v tom případě začíná i končí násobkem pěti),

▷ maximálně $12 \cdot 5 + 4 = 64$ čísel (řada v tom případě začíná násobkem pěti zvětšeným o 1 a končí násobkem pěti zmenšeným o 1).

Aby byla splněna podmínka, že v řadě je 10 násobků sedmi, musí být v řadě

▷ minimálně $10 \cdot 7 - 6 = 64$ čísel (řada v tom případě začíná i končí násobkem sedmi),

▷ maximálně $10 \cdot 7 + 6 = 76$ čísel (řada v tom případě začíná násobkem sedmi zvětšeným o 1 a končí násobkem sedmi zmenšeným o 1).

Mají-li být splněny obě podmínky, musí být v řadě 64 čísel.

b) Z předchozích úvah plyne, že první číslo v řadě je násobek pěti zvětšený o 1 a zároveň násobek sedmi. Postupným prověřením nejmenších přirozených násobků sedmi zjistíme, že nejmenší takové číslo je 21. Hledanou řadou čísel tedy mohou být např. čísla 21 až 84.

Poznámka. Prvním číslem v řadě mohou být kromě čísla 21 i všechny přirozené násobky čísla 35 zvětšené o 21. Takto dostáváme další možné řady čísel: 56 až 119, 91 až 154, 126 až 189 atd.