

## Komentáře k domácímu kolu kategorie Z8

1. Najděte všechna čtyřmístná čísla dělitelná třemi, která po vynásobení číslem 17 dávají součin končící trojčíslem 519.

ŘEŠENÍ. Zapišeme úlohu jako algebrogram a postupně doplňujeme neznámé číslice:

$$\begin{array}{r}
 a \ b \ c \ d \\
 \phantom{a \ b \ c} 1 \ 7 \\
 \hline
 * \ * \ e \ f \ g \\
 a \ b \ c \ d \\
 \hline
 * \ * \ * \ 5 \ 1 \ 9
 \end{array}$$

Jelikož  $g = 9$ , musí být  $d = 7$ . Po dosazení dostaneme

$$\begin{array}{r}
 a \ b \ c \ 7 \\
 \phantom{a \ b \ c} 1 \ 7 \\
 \hline
 * \ * \ e \ f \ 9 \\
 a \ b \ c \ 7 \\
 \hline
 * \ * \ * \ 5 \ 1 \ 9
 \end{array}$$

Odtud je zřejmé, že  $f = 4$ . Pak musí být  $c = 0$ . Dosadíme a získáme

$$\begin{array}{r}
 a \ b \ 0 \ 7 \\
 \phantom{a \ b \ 0} 1 \ 7 \\
 \hline
 * \ * \ e \ 4 \ 9 \\
 a \ b \ 0 \ 7 \\
 \hline
 * \ * \ * \ 5 \ 1 \ 9
 \end{array}$$

Dále vidíme, že  $e = 4$  a tedy  $b = 2$ . Pak máme

$$\begin{array}{r}
 a \ 2 \ 0 \ 7 \\
 \phantom{a \ 2 \ 0} 1 \ 7 \\
 \hline
 * \ * \ 4 \ 4 \ 9 \\
 a \ 2 \ 0 \ 7 \\
 \hline
 * \ * \ * \ 5 \ 1 \ 9
 \end{array}$$

Protože čtyřmístné číslo  $a207$  je dělitelné třemi, může být  $a = 3$  nebo  $a = 6$  nebo  $a = 9$ . Úloha má tedy 3 řešení.

Hledaná čtyřmístná čísla jsou 3 207, 6 207 a 9 207.

2. Najděte všechny trojice přirozených čísel menších než 10, jejichž součin je sedmi-násobkem jejich součtu.

ŘEŠENÍ. Označíme hledaná čísla  $a, b, c$ ;  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . Má platit:

$$abc = 7(a + b + c).$$

Ze zápisu je patrné, že aspoň jedno z čísel  $a, b, c$  je rovno sedmi. Předpokládejme, že  $a = 7$ . Pak platí:  $7bc = 7(7 + b + c)$ , tj.

$$bc = 7 + b + c.$$

Odtud plyne, že  $b > 1$  a  $c > 1$ . Jednotlivé možnosti zapíšeme do tabulky, ve které volíme  $b$  a dopočítáme  $c$ :

$b$	$c$
2	9
3	5
4	neexistuje
5	3
6	neexistuje
7	neexistuje
8	neexistuje
9	2

Z tabulky plyne, že úloha má dvě řešení. Hledané trojice čísel jsou  $(2, 7, 9)$  nebo  $(3, 5, 7)$ .

3. *Jano si koupil sedmimílové boty. Jeho kamarád Honza z Čech si koupil létající koberec. Potom se oba dva zúčastnili pohádkového dvanáctihodinového závodu. Během závodu měli hlad, a tak se oba dva zastavili na jídlo. Oběma zabrala přestávka na jídlo jednu hodinu. Kdyby se Honza nezastavil po cestě na vepřo-knedlo-zelo, předběhl by Jana o 51 kilometrů. Kdyby se Jano nestavil na bryndzové halušky, předběhl by Honzu o 28 kilometrů. Jak daleko od sebe by skončili, kdyby nejedl ani jeden z nich? Kdo z nich by byl první?*

ŘEŠENÍ. Kdyby závody trvaly 24 hodin a po dobu prvních 12 hodin by jedl Jano, byl by Honza po těchto 12 hodinách o 51 km vpředu. Po dobu druhých 12 hodin, kdyby jedl pouze Honza, by Jano tento náskok snížil o celých 28 km, tedy Honza by vyhrál o  $51 - 28 = 23$  km. Když za 23 hodin, které oba závodili, předběhne Honza Jana o 23 km, tak za každou hodinu závodu ho předběhne o 1 km. Kdyby ani jeden z nich nejedl, byl by první Honza. Jejich vzdálenost na konci závodu by byla 12 km.

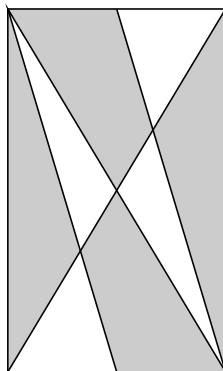
4. V Tramtárii mají pět lékařských fakult, z nichž každá může přijmout do prvního ročníku 200 studentů. Přijímací zkoušky na jednotlivé fakulty se konají v různé dny, proto si studenti mohou podat přihlášku na více škol. Ptali jsme se na jednotlivých fakultách, kolik dostali přihlášek pro rok 2007/08. Získali jsme tyto odpovědi:
1. fakulta: „Dostali jsme pětkrát více přihlášek, než kolik jsme měli volných míst.“
  2. fakulta: „U nás počet uchazečů převyšoval kapacitu o 320 %.“
  3. fakulta: „Na naši fakultu se hlásilo o 510 uchazečů více, než kolik jsme mohli přijmout.“
  4. fakulta: „U nás na každé volné místo připadly v průměru 3 přihlášky.“
  5. fakulta: „K nám se hlásilo o tři čtvrtiny zájemců více, než kolik jsme měli míst.“
- V akademickém roce 2007/08 nakonec na lékařské fakulty nastoupilo do 1. ročníku 1 000 studentů. Ze statistik vyplývá, že zájemce o studium medicíny podal na lékařské fakulty průměrně 2,5 přihlášky. Kolik zájemců se nedostalo na žádnou z fakult?

ŘEŠENÍ. Počty přihlášek na jednotlivé fakulty:

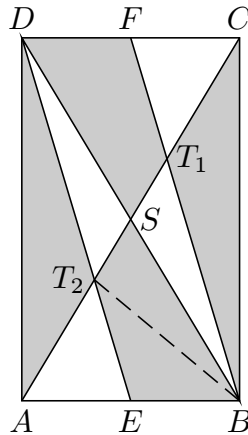
1. fakulta ...  $5 \cdot 200 = 1\,000$ ,
2. fakulta ...  $200 + 3,2 \cdot 200 = 840$ ,
3. fakulta ...  $200 + 510 = 710$ ,
4. fakulta ...  $200 \cdot 3 = 600$ ,
5. fakulta ...  $200 + \frac{3}{4} \cdot 200 = 350$ .

Zájemci o studium medicíny podali v daném roce celkem  $1\,000 + 840 + 710 + 600 + 350 = 3\,500$  přihlášek. Uchazečů bylo  $3\,500 : 2,5 = 1\,400$ . Na žádnou fakultu se nedostalo  $1\,400 - 1\,000 = 400$  zájemců.

5. Pan Poleno s panem Střepinou vyráběli nové domovní dveře o velikosti  $3\text{ m}^2$ . Rám dveří tvaru obdélníku, jeho úhlopříčky a dvě další příčky, které spojovaly dva vrcholy obdélníku se středy protilehlých stran, byly z kovových tyčí. Pan Poleno vyplnil dřevem čtyři tmavé části dveří a pan Střepina zbývající části dveří zasklil. Kolik metrů čtverečních dřeva potřeboval pan Poleno na výplň dveří?



ŘEŠENÍ. Označme  $E$  střed  $AB$ ,  $F$  střed  $CD$ .  $ABCD$  je obdélník, jeho úhlopříčky  $AC$  a  $BD$  se navzájem půlí,  $S$  je průsečík úhlopříček. Vzhledem k symetrii se stačí



zabývat pouze trojúhelníkem  $ABC$ , který má obsah  $1,5 \text{ m}^2$ . Body  $T_2$  resp.  $T_1$  jsou těžiště trojúhelníků  $ABD$  resp.  $BCD$ . Proto platí:

$$|AT_2| = |T_2T_1| = |T_1C| = \frac{1}{3}|AC|.$$

Trojúhelníky  $ABT_2$ ,  $BT_1T_2$  a  $BCT_1$  mají tedy stejný obsah  $0,5 \text{ m}^2$ . Také trojúhelníky  $AET_2$  a  $EBT_2$  mají stejný obsah a analogicky trojúhelníky  $T_2BS$  a  $BT_1S$  mají stejný obsah. Odtud vidíme, že poměr dřevo : sklo je  $2 : 1$ .

Pan Poleno spotřeboval  $2 \text{ m}^2$  dřeva.

- 6.** Uprostřed náměstí v Kocourkově je čtvercový travnatý záhon. Kocourkovští zjistili, že zapomněli udělat chodník. Proto na něj z každého okraje záhonu ubrali 2 metry. Před položením zámkové dlažby a písku pod ní bylo třeba pod celou plochu chodníku vykopat půl metru hluboký výkop. Odkopáním trávy a hlíny se záhon zmenšil o  $1\,200 \text{ m}^2$ .
- Vypočítejte obsah plochy zbylého travnatého záhonu.
  - Kolik  $\text{m}^3$  písku je pod dlažbou, jestliže povrch dlažby je v rovině s travnatým záhonem a výška dlaždice je  $8 \text{ cm}$ ?

**ŘEŠENÍ.** Když z každé strany ubrali 2 metry, rozměry trávníku se zmenšily o 4 metry. Zmenšení plochy nám umožní vypočítat rozměr záhonu:

$$\begin{aligned} (a \cdot a) - (a - 4)(a - 4) &= 1\,200, \\ 8a - 16 &= 1\,200, \\ a &= 152. \end{aligned}$$

Strana náměstí je tedy dlouhá 152 metry.

Záhon má nyní obsah  $(152 - 4)(152 - 4) = 148^2 = 21\,904 \text{ m}^2$ . Objem šterku vypočítáme z  $1\,200 \text{ m}^2$  zmenšení,  $0,5 \text{ m}$  hlubokého výkopu sníženého o  $8 \text{ cm}$ , tj. o výšku dlaždice:

$$\begin{aligned} V &= 1\,200(0,5 - 0,08), \\ V &= 1\,200 \cdot 0,42, \\ V &= 504. \end{aligned}$$

Pod chodníkem je  $504 \text{ m}^3$  šterku.