57. ročník Matematické olympiády

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z9

1. *Najděte všechna čtyřmístná čísla končící číslicí 9, která jsou dělitelná každou svou číslicí.*

Řešení. Je zřejmé, že takové číslo nemůže obsahovat číslici 0. Hledané čtyřmístné číslo bude mít vždy na místě jednotek číslici 9, takže bude liché a nemůže tedy obsahovat žádnou z číslic 2, 4, 6, 8. Ze stejného důvodu nebude nikdy dělitelné pěti, proto nemůže být v jeho zápise číslice 5.

Označme hledané číslo ve tvaru

$$abc9,$$

kde $a,b,c \in \{1,3,7,9\}$ jsou číslice. Vzhledem k tomu, že hledané čtyřmístné číslo musí být dělitelné devíti, dostáváme podmínku

$$9 \mid (a+b+c).$$

Přípustné možnosti vypíšeme do tabulky:

$a+b+c$	rozklad	možná čísla
27	$9+9+9$	9 999
18	nelze	
9	$7+1+1$, $3+3+3$	7 119, 1 719, 1 179, 3 339

Odtud dostáváme, že zadání úlohy vyhovují čísla 9 999, 7 119, 3 339.

2. *Petr se ptal babičky, kolik je dědečkovi let. Babička mu odpověděla takto: „To víš, už dávno nám není padesát, ale zase nám ještě není osmdesát let. Když vynásobíš součet mého a dědečkova věku jejich rozdílem a k výsledku přičteš oba naše věky, dostaneš 492.“ „Aha,“ řekl po chvíli Petr, „tak to je dědečkovi…“ Kolik let je Petrovu dědečkovi, víte-li, že je starší než Petrova babička?*

Řešení. Označme babiččin věk b a dědečkův věk d (v letech). Ze zadání vyplývá, že $50 < b < 80$, $50 < d < 80$, $b < d$. Sestavíme rovnici:

$$(b+d)\cdot(d-b)+b+d = 492,$$

kterou lze vytknutím výrazu $(b+d)$ na levé straně rovnice převést na tvar:

$$(b+d)\cdot(d-b+1) = 492.$$

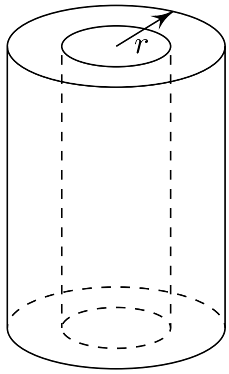
Ze zadání víme, že součet věků Petrových prarodičů (tj. $b+d$) je číslo větší než 100 a menší než 160. Najdeme všechny dělitele čísla $492 = 2^2\cdot 3\cdot 41$. Jsou to čísla: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 41, 82, 123, 164, 246, 492. Z nich výše uvedenou podmínku pro součet $(b+d)$ splňuje jediné — číslo 123. Odtud dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} b + d &= 123, \\ d - b + 1 &= 4. \end{aligned}$$

Jejím řešením je $b = 60$ let, $d = 63$ let.

Petrovu dědečkovi je tedy 63 let.

3. *Středem rotačního válce s podstavou o poloměru r a výškou v byl vyvrtán válcový otvor. Objem takto vzniklého „dutého válce“ je poloviční než objem válce původního. Vyjádřete tloušťku stěny dutého válce pomocí r.*



Řešení. Objem původního dřevěného válce je $V_p = \pi r^2 v$.

Označme x poloměr vyříznutého válcového otvoru. Protože objem „dutého válce“ je poloviční oproti objemu původního válce, musí být objem vyříznutého válce V_v rovněž poloviční. Proto platí:

$$V_v = \pi x^2 v = \frac{1}{2} V_p$$

Odtud plyne rovnice:

$$\begin{aligned} \pi x^2 v &= \frac{1}{2} \pi r^2 v, \\ x^2 &= \frac{r^2}{2}, \\ x &= r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

(Protože x, v i r jsou kladná reálná čísla, můžeme postupovat uvedeným způsobem.) Tloušťka stěny „dutého válce“ je

$$r - x = r - r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = r \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. *Minulou divadelní sezónu se prodávaly vstupenky za jednotnou cenu 160 Kč. Pro letošní sezónu se sedadla rozdělila do dvou kategorií. Místa I. kategorie stojí 180 Kč, místa II. kategorie 155 Kč. Pokud jsou všechna sedadla v sále rozprodána, je celková tržba stejná jako při vyprodaném představení loni. Ředitel divadla však není s tímto rozdělením spokojen, a pro příští sezónu plánuje změnu: z nejméně atraktivních míst současné II. kategorie vytvoří novou III. kategorii. Aby se tržba za vyprodaný sál nezměnila, rozhodl, že vstupenky budou stát 180 Kč (I. kategorie), 160 Kč (II. kategorie) a 130 Kč (III. kategorie). V jakém poměru budou příští sezónu počty sedadel jednotlivých kategorií?*

ŘEŠENÍ. Počet sedadel letošní I. kategorie označme a, počet sedadel letošní II. kategorie označme b. Řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 160(a+b) &= 180a + 155b, \\ 5b &= 12a, \\ \frac{a}{b} &= \frac{5}{20} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Počet sedadel budoucí II. kategorie označme b_1, počet sedadel budoucí III. kategorie označme b_2. Řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 155(b_1+b_2) &= 160b_1 + 130b_2, \\ 25b_2 &= 5b_1, \\ \frac{b_1}{b_2} &= \frac{25}{5} = \frac{5}{1}. \end{aligned}$$

Oba získané poměry vhodně rozšíříme, abychom dokázali sestavit postupný poměr:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}; \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}; \quad a : b_1 : b_2 = 3 : 10 : 2.$$

Počty sedadel I., II. a III. kategorie budou příští sezónu v poměru $3 : 10 : 2$.

5. *Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a je o 6,50 Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Ve školním bufetu prodávají čokoládu za 19,50 Kč. Kolik zaplatili kluci za všech pět čokolád dohromady? Kolik stojí jedna čokoláda v obchodě za školou?*

ŘEŠENÍ. Označme n cenu jedné čokolády v obchodě naproti škole a z cenu čokolády v obchodě za školou. Potom ceny čokolád musí splňovat následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2n + 2z + 19{,}50 &= 5n + 6, \\ 5n + 6 &= 5z - 6{,}50. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice postupně zjistíme:

$$\begin{aligned} 5n + 12{,}50 &= 5z, \\ n + 2{,}50 &= z. \end{aligned}$$

Odtud dosadíme za z do první rovnice výraz $(n + 2{,}50)$:

$$\begin{aligned} 2n + 2 \cdot (n + 2{,}50) + 19{,}50 &= 5n + 6, \\ 2n + 2n + 5 + 19{,}50 &= 5n + 6, \\ 18{,}50 \text{ Kč} &= n. \end{aligned}$$

Protože čokoláda v obchodě za školou je o 2,50 Kč dražší než v obchodě naproti škole, musí tam stát 21 Kč.

Za všech pět čokolád zaplatili: $2 \cdot 18{,}50 + 2 \cdot 21 + 19{,}50 = 98{,}50$ Kč.

6. *V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte bod K, který je vrcholem rovnoběžníku $BCDK$, a bod L, který je vrcholem rovnoběžníku $CDAL$. Ukažte, že přímka KL prochází středem strany AB daného čtyřúhelníku $ABCD$.*

Řešení. Ze zadání plyne, že úsečky CD, BK a AL jsou shodné a navíc rovnoběžné. Body K, L přitom leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou AB. Shodné úsečky AL a BK, které leží rovněž v opačných polorovinách vyťatých přímkou AB, jsou tudíž protilehlými stranami rovnoběžníku $AKBL$. Jeho úhlopříčky AB a KL se navzájem půlí, a proto přímka KL prochází středem strany AB.